

**НЕКОММЕРЧЕСКОЕ АККРЕДИТОВАННОЕ ЧАСТНОЕ  
ПРОФЕССИОНАЛЬНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ  
«НЕВИННОМЫССКИЙ ЭКОНОМИКО-ПРАВОВОЙ ТЕХНИКУМ»**

***МЕТОДИЧЕСКОЕ ПОСОБИЕ***

**ОРГАНИЗАЦИЯ  
ПРАКТИЧЕСКОЙ РАБОТЫ ОБУЧАЮЩИХСЯ  
По дисциплине ОП.10 Численные методы  
для студентов специальности 09.02.07 Информационные системы и  
программирование**

**АВТОР- СОСТАВИТЕЛЬ:** Мельникова Е.Н., преподаватель НАЧ  
ПОУ НЭПТ

Методические рекомендации предназначены для студентов с целью сопровождения и рекомендаций по организации практической работы обучающихся, ее назначению, планированию, форм организации и видов контроля.

### Содержание:

<b>Введение</b>	Стр. 4
<b>Практическая работа № 1.</b> Составление математических моделей.	Стр. 5
<b>Практическая работа № 2.</b> Вычисление абсолютной и относительной погрешности	Стр. 11
<b>Практическая работа № 3.</b> Вычисление произведения матриц.	Стр.13
<b>Практическая работа № 4.</b> Вычисление определителя матриц	Стр. 13
<b>Практическая работа № 5.</b> Вычисление обратной матрицы	Стр. 17
<b>Практическая работа № 6.</b> Вычисление систем 2-го порядка	Стр. 19
<b>Практическая работа № 7.</b> Вычисление СЛАУ	Стр. 23
<b>Практическая работа № 8.</b> Вычисление обратной матрицы.	Стр. 27
<b>Практическая работа № 9.</b> Работа с формулой Крамера	Стр. 31
<b>Практическая работа № 10.</b> Вычисление с помощью метода Гаусса.	Стр. 35
<b>Практическая работа № 11.</b> Программная иллюстрация метода.	Стр. 40
<b>Практическая работа № 12.</b> Решение системы методом простых итераций.	Стр. 43
<b>Практическая работа № 13</b> Интерполирование функции.	Стр. 51
<b>Практическая работа № 14</b> Расчет с помощью полинома Ньютона.	Стр. 61
<b>Практическая работа № 15</b> Аппроксимация функции одной переменной.	Стр. 65
<b>Практическая работа №16</b> Вычисление интеграла функции.	Стр.68
<b>Литература</b>	Стр. 72

## **ВВЕДЕНИЕ**

В учебном процессе наряду с теоретическим обучением значительное место отводится практическим работам. Правильное сочетание теоретических знаний с процессами выполнения практических работ обеспечивает высокое качество подготовки специалистов.

Данные методические указания представляют собой руководство по выполнению практических работ, составленное в соответствии с учебной программой дисциплины

ОП.10 Численные методы в программировании.

Каждая практическая работа содержит контрольные вопросы, краткую теорию по теме, задание и порядок выполнения работы. Список используемой литературы прилагается в конце практикума.

Перед выполнением работы необходимо изучить краткую теорию.

Каждая практическая работа защищается после выполнения на уроке или консультации.

**Таблица 1 - Технологическая карта практической работы студента по дисциплине «Численные методы» специальность 09.02.07 - Информационные системы и программирование**

<i>Наименование темы</i>	<i>Тематика практической работы</i>	<i>Кол-во часов</i>	<i>Виды практической работы</i>		<i>Информационное обеспечение</i>	<i>Форма контроля</i>
			<i>Обязательная</i>	<i>По выбору студента</i>		
Тема 1.1 Математическое моделирование	<b>. Практические занятия</b> №1 Составление математических моделей. №2 Вычисление абсолютной и относительной погрешности. №3 Вычисление произведения матриц. №4 Вычисление определителя матриц №5 Вычисление обратной матрицы	20	Выполнение работы, составление отчета по практической работе, ответы на контрольные вопросы		Численные методы : учебник и практикум для среднего профессионального образования / У. Г. Пирумов [и др.] ; под редакцией У. Г. Пирумова. — 5-е изд., перераб. и доп. — Москва : Издательство Юрайт, 2023. — 421 с. — (Профессиональное образование). — ISBN 978-5-534-11634-2. — Текст : электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: <a href="https://urait.ru/bcode/518500">https://urait.ru/bcode/518500</a>	Защита практической работы
Тема 2.1 Формула Крамера.	<b>Практические занятия</b> №6. Вычисление систем 2-го порядка № 7 Вычисление СЛАУ №8. Вычисление обратной матрицы.	16	Выполнение работы, составление отчета по практической работе, ответы на		Численные методы : учебник и практикум для среднего профессионального образования / У. Г. Пирумов [и др.] ; под	Защита практической работы

	№ 9. Работа с формулой Крамера		контрольные вопросы		редакцией У. Г. Пирумова. — 5-е изд., перераб. и доп. — Москва : Издательство Юрайт, 2023. — 421 с. — (Профессиональное образование). — ISBN 978-5-534-11634-2. — Текст : электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: <a href="https://urait.ru/bcode/518500">https://urait.ru/bcode/518500</a>	
Тема 2.2 Метод Гаусса.	<b>Практические занятия</b> №10 Вычисление с помощью метода Гаусса. №11 Программная иллюстрация метода	4	Выполнение работы, составление отчета по практической работе, ответы на контрольные вопросы		Численные методы : учебник и практикум для среднего профессионального образования / У. Г. Пирумов [и др.] ; под редакцией У. Г. Пирумова. — 5-е изд., перераб. и доп. — Москва : Издательство Юрайт, 2023. — 421 с. — (Профессиональное образование). — ISBN 978-5-534-11634-2. — Текст : электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: <a href="https://urait.ru/bcode/518500">https://urait.ru/bcode/518500</a>	Защита практической работы

					500	
Тема 2.3 Метод простых итераций	<b>Практические занятия</b> №12 Решение системы методом простых итераций.	2	Выполнение работы, составление отчета по практической работе, ответы на контрольные вопросы		Зенков, А. В. Численные методы : учебное пособие для среднего профессионального образования / А. В. Зенков. — Москва : Издательство Юрайт, 2021. — 122 с. — (Профессиональное образование). — ISBN 978-5-534-10895- 8. — Текст : электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: <a href="https://urait.ru/bcode/471647">https://urait.ru/bcode/471647</a> . Учебное пособие для СПО	Защита практической работы
Тема 3.1 Аппроксимация функций.	<b>Практические занятия</b> № 13. Интерполирование функции	2	Выполнение работы, составление отчета по практической работе, ответы на контрольные вопросы		Зенков, А. В. Численные методы : учебное пособие для среднего профессионального образования / А. В. Зенков. — Москва : Издательство Юрайт, 2023. — 122 с. — (Профессиональное образование). — ISBN	Защита практической работы

					978-5-534-10895-8. — Текст : электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: <a href="https://urait.ru/bcode/513780">https://urait.ru/bcode/513780</a>	
Тема 3.2 Формула Лагранжа.	<b>Практические занятия</b> №14. Расчет с помощью полинома Ньютона	2	Выполнение работы, составление отчета по практической работе, ответы на контрольные вопросы		Зенков, А. В. Численные методы : учебное пособие для среднего профессионального образования / А. В. Зенков. — Москва : Издательство Юрайт, 2023. — 122 с. — (Профессиональное образование). — ISBN 978-5-534-10895-8. — Текст : электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: <a href="https://urait.ru/bcode/513780">https://urait.ru/bcode/513780</a>	Защита практической работы
Тема 3.3 Приближающие функции	<b>Практическое занятие</b> №15 Аппроксимация функции одной переменной	2	Выполнение работы, составление отчета по практической работе, ответы на контрольные вопросы		Гателюк, О. В. Численные методы : учебное пособие для среднего профессионального образования / О. В. Гателюк, Ш. К. Исмаилов, Н. В.	Защита практической работы



					Манюкова. — Москва : Издательство Юрайт, 2023. — 140 с. — (Профессиональное образование). — ISBN 978-5-534-07480-2. — Текст : электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: <a href="https://urait.ru/bcode/514036">https://urait.ru/bcode/514036</a>	
Тема 4.1 Численное интегрирован ие	<b>Практическое занятие</b> №16 Вычисление интеграла функции	2	Выполнение работы, составление отчета по практической работе, ответы на контрольные вопросы		Гателюк, О. В. Численные методы : учебное пособие для среднего профессионального образования / О. В. Гателюк, Ш. К. Исмаилов, Н. В. Манюкова. — Москва : Издательство Юрайт, 2023. — 140 с. — (Профессиональное образование). — ISBN 978-5-534-07480-2. — Текст : электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: <a href="https://urait.ru/bcode/514036">https://urait.ru/bcode/514036</a> . Учебное пособие для СПО	Защита практической работы

**Тема:** Составление математических моделей.

10

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \beta_1 + \alpha_{11}x_1^{(k)} + \dots + \alpha_{1n}x_n^{(k)}, \\ x_2^{(k+1)} = \beta_2 + \alpha_{21}x_1^{(k)} + \dots + \alpha_{2n}x_n^{(k)}, \\ \dots \\ x_n^{(k+1)} = \beta_n + \alpha_{n1}x_1^{(k)} + \dots + \alpha_{nn}x_n^{(k)}. \end{cases} \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (2.1.3)$$

или, что тоже самое  $X^{(k+1)} = \beta + \alpha X^{(k)}$ ,  $k=0, 1, 2, \dots$ ,

где  $\alpha = (\alpha_{ij})$ . В результате получают последовательность приближенных решений:  $X^{(0)}, X^{(1)}, \dots, X^{(k)}, \dots$

Если эта последовательность имеет предел  $X = \lim_{k \rightarrow \infty} X^{(k)}$ , то этот предел является решением системы (2.1.2)', а следовательно, и системы (2.1.1). Процесс итераций быстро сходится, если диагональные коэффициенты  $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$  исходной системы значительно преобладают по абсолютной величине над остальными ее коэффициентами, или, что тоже самое, коэффициенты  $a_{ij}$  системы (2.1.2)' достаточно малы по абсолютной величине.

Более точно это формулируется так.

Процесс итераций для системы линейных уравнений (2.1.2)' сходится к единственному ее решению, если какая-либо норма матрицы этой системы меньше единицы, в частности, если выполняется хотя бы одно из условий:

$$\begin{aligned} \|\alpha\|_1 &= \max_j \sum_i |\alpha_{ij}| < 1, \\ \|\alpha\|_\infty &= \max_i \sum_j |\alpha_{ij}| < 1, \\ \|\alpha\|_E &= \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |\alpha_{ij}|^2} < 1, \\ \|\alpha\| &= \sqrt{\max \lambda_{\alpha^T \alpha}} < 1, \end{aligned} \quad (2.1.4)$$

где  $\max \lambda_{\alpha^T \alpha}$  - наибольшее характеристическое число матрицы  $\alpha^T \alpha$ .

Погрешность приближений в общем случае можно оценить по формуле:

$$\|X - X^{(k)}\| \leq \frac{\|X^{(k+1)} - X^{(k)}\|}{1 - \|\alpha\|} \quad (2.1.5)$$

или по формуле:

$$\|X - X^{(k)}\| \leq \frac{\|\alpha\|^{k+1}}{1 - \|\alpha\|} \cdot \|\beta\|, \quad (2.1.6)$$

если за нулевое приближение выбран вектор  $X^{(0)} = \beta = (\beta_1, \dots, \beta_n)^T$ .

Из формулы (2.1.6) можно найти номер  $k$  нужной итерации, который обеспечит необходимую точность приближенного решения. На практике процесс итераций обычно приостанавливают, когда во всех координатах приближенных решений стабилизируется нужное число десятичных знаков после запятой.

**Пример 2.** Методом итераций решить систему:

$$\begin{cases} 10x_1 + 2x_2 + x_3 = 10, \\ x_1 + 10x_2 + 2x_3 = 12, \\ x_1 + x_2 + 10x_3 = 8. \end{cases}$$

**Решение:** Разрешив первое уравнение относительно  $x_1$ , второе – относительно  $x_2$ , третье – относительно  $x_3$ , придем к системе:

$$\begin{cases} x_1 = 1 - 0,2x_2 - 0,1x_3, \\ x_2 = 1,2 - 0,1x_1 - 0,2x_3, \\ x_3 = 0,8 - 0,1x_1 - 0,1x_2. \end{cases} \quad (*)$$

Матрицей этой системы является матрица:

$$\alpha = \begin{pmatrix} 0 & -0,2 & -0,1 \\ -0,1 & 0 & -0,2 \\ -0,1 & -0,1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ее норма:

$$\|\alpha\|_1 = \max(0,1+0,1; 0,2+0+0,1; 0,1+0,2+0) = \max(0,2; 0,3; 0,3) = 0,3 < 1.$$

Поэтому процесс итераций для системы (\*) будет сходящимся. За нулевое приближение примем:

$$x_1^{(0)} = 1, x_2^{(0)} = 1,2, x_3^{(0)} = 0,8.$$

Подставляя эти значения соответственно вместо  $x_1, x_2, x_3$  в правые части уравнений системы (\*), получим

$$x_1^{(1)} = 0,68, x_2^{(1)} = 0,94, x_3^{(1)} = 0,58.$$

С полученным приближением поступим аналогично и т.д.

Результаты вычислений, округленные до трех десятичных знаков, после запятой, приведены в табл. 1:

Таблица 1

k	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$	$x_3^{(k)}$
0	1	1,2	0,8
1	0,68	0,94	0,58
2	0,754	1,016	0,638
3	0,733	0,997	0,623
4	0,738	1,002	0,627
5	0,737	1,001	0,626
6	0,737	1,001	0,626

Процесс приостановили, т.к. в значениях каждой неизвестной  $x_1, x_2, x_3$  стабилизировалось по три десятичных знака после запятой. Таким образом можно принять  $X \sim X_5 = (0,737; 1,001; 0,626)^T$ .

Сделаем оценку погрешности пятого приближения. По формуле (2.1.6), считая  $\|\alpha\|_1 = 0,3$ ;  $\|\beta\|_1 = \|(1, 1,2, 0,8)^T\|_1 = 1+1,2+0,8=3$ , получаем

$$\|X - X^{(5)}\|_1 \leq \frac{(0,3)^6}{1 - 0,3} \cdot 3 = 0,001.$$

Это означает, что в пятом приближении каждая неизвестная имеет не менее чем по два верных десятичных знака после запятой.

## 2.2 МЕТОД ЗЕЙДЕЛЯ

Метод Зейделя представляет собой некоторые видоизменения метода итераций. В нем при вычислении  $(k+1)$ -го приближения неизвестной  $x_i$  используются уже вычисленные значения  $(k+1)$ -го приближения для неизвестных  $x_1, x_2, \dots, x_{i-1}$ . Так, предполагая, что для приведенной системы:

уже найдено  $k$ -е приближение  $x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)}$ , ее  $(k+1)$ -е приближение находится следующим образом:

Обычно метод Зейделя дает лучшую сходимость, чем сходимость метода простой итерации.

**Решение:** Разрешив первое уравнение относительно  $x_1$ , второе относительно  $x_2$ , третье – относительно  $x_3$ , придем к системе:

удобной для проведения метода Зейделя. За нулевое приближение примем  $x_1^{(0)}=1, x_2^{(0)}=0,8, x_3^{(0)}=0,9$ .

И Т.Д.

### Таблица 2

13

0	1	0,8	0,9
1	0,99	0,971	0,9952
2	0,9976	0,9989	1,0000
3	0,9999	1,0000	1,0000
4	1,0000	1,0000	1,0000
5	1,0000	1,0000	1,0000

Процесс приостановили, так как значения каждой неизвестной  $x_1, x_2, x_3$  стабилизировались по четыре десятичных знака после запятой. За искомое решение можно принять  $X(1, 1, 1)^T$ .

### Задание

Дана система линейных алгебраических уравнений, коэффициенты при неизвестных и свободные члены которой являются целыми числами. Найдите ее приближенное решение методами итераций и Зейделя. Сравните с точным решением  $\xi$ .

1. 
$$\begin{cases} 5x_1 + x_3 = 11, \\ x_1 + 3x_2 - x_3 = 4, \\ -3x_1 + 2x_2 + 10x_3 = 6. \end{cases} \quad \xi = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$
2. 
$$\begin{cases} 2x_1 - x_3 = -3, \\ -x_1 + 3x_2 + x_3 = 2, \\ x_1 - x_2 + 4x_3 = 3. \end{cases} \quad \xi = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$
3. 
$$\begin{cases} 2x_1 - x_3 = 1, \\ x_1 - 3x_2 + x_3 = 2, \\ x_1 + x_2 + 3x_3 = 4. \end{cases} \quad \xi = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$
4. 
$$\begin{cases} 5x_1 + x_2 - x_3 = -5, \\ -x_1 + 3x_2 + x_3 = 5, \\ x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 1. \end{cases} \quad \xi = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$
5. 
$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - x_3 = -1, \\ -2x_1 + 4x_2 + x_3 = 5, \\ x_1 + x_2 + 3x_3 = -3. \end{cases} \quad \xi = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$
6. 
$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - x_3 = 6, \\ 2x_1 + 4x_2 + x_3 = 9, \\ x_1 - x_2 + 3x_3 = 4. \end{cases} \quad \xi = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$
7. 
$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 = -2, \\ 2x_1 + 5x_2 - 2x_3 = -4, \\ x_1 - x_2 + 3x_3 = 2. \end{cases} \quad \xi = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$
11. 
$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 = 3, \\ 5x_2 + 2x_3 = 7, \\ x_1 - x_2 + 3x_3 = 4. \end{cases} \quad \xi = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$
12. 
$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - x_3 = -2, \\ x_1 + 5x_2 - x_3 = 8, \\ 2x_1 + 3x_3 = 1. \end{cases} \quad \xi = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$
13. 
$$\begin{cases} 3x_1 - x_3 = -4, \\ 2x_1 - 5x_2 + x_3 = 9, \\ 2x_1 - 2x_2 + 6x_3 = 8. \end{cases} \quad \xi = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$
14. 
$$\begin{cases} 3x_1 - x_3 = 7, \\ 2x_1 - 5x_2 + x_3 = -2, \\ 2x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 1. \end{cases} \quad \xi = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$
15. 
$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 = 0, \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 = 12, \\ -x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 32. \end{cases} \quad \xi = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$
16. 
$$\begin{cases} -4x_1 + 2x_2 + x_3 = -5, \\ -x_1 + 5x_2 + x_3 = -5, \\ 2x_1 + 3x_3 = 5. \end{cases} \quad \xi = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$
17. 
$$\begin{cases} 5x_1 - x_2 + x_3 = -3, \\ -x_1 + 3x_2 + x_3 = -1, \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 = 1. \end{cases} \quad \xi = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
8. \quad & \begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 = 1, \\ 2x_2 - x_3 = 3, \\ -x_1 + x_2 + 5x_3 = -5. \end{cases} \quad \xi = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} & 18. \quad \begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + x_3 = 3, \\ 3x_1 + 5x_2 - x_3 = 4, \\ 2x_1 + x_2 - 4x_3 = 6. \end{cases} \quad \xi = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \\
9. \quad & \begin{cases} 4x_1 + x_2 - x_3 = 7, \\ 2x_1 + 3x_2 = 7, \\ x_1 - x_2 + 5x_3 = 11. \end{cases} \quad \xi = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} & 19. \quad \begin{cases} 4x_1 + x_2 + 2x_3 = -6, \\ 3x_2 + x_3 = -1, \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 = -5. \end{cases} \quad \xi = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \\
10. \quad & \begin{cases} 2x_1 - x_3 = 1, \\ x_1 - 4x_2 + 2x_3 = -5, \\ x_1 + x_2 + 3x_3 = 6. \end{cases} \quad \xi = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} & 20. \quad \begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 = 6, \\ -2x_2 + x_3 = -3, \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 = -1. \end{cases} \quad \xi = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

### Порядок выполнения работы

1. Преобразуйте систему к приведенному виду с выполнением условия сходимости итерационной последовательности.
2. Найдите вручную приближенное решение системы методами итераций и Зейделя.
3. Составьте программу вычисления приближений до достижения требуемой точности с выводом результатов в таблицу (на любом языке программирования):

k	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$	$x_3^{(k)}$
...	...	...	...

где  $x_1^{(k)}$ ,  $x_2^{(k)}$ ,  $x_3^{(k)}$  - координаты векторов – приближений.

4. Найдите приближенное решение системы, с помощью программы, и выпишите его координаты.
5. Сделайте оценку погрешности.

### Контрольные вопросы

1. Способы определения расстояния в пространстве  $R^n$ .
2. Абсолютная погрешность числового вектора и его координат.
3. Сходимость последовательности векторов в  $R^n$ .
4. Приведенная система уравнений, способы преобразования систем к приведенному виду.
5. Суть метода итераций.
6. В чем состоит отличие метода Зейделя от метода итераций?
7. Построение итерационной последовательности.
8. Достаточное условие сходимости итерационной последовательности.
9. Оценка погрешности приближенного решения.
10. Условие окончания итерационного процесса при нахождении решения с заданной точностью.

## Практическая работа № 2

Тема: Вычисление абсолютной и относительной погрешности

**Цель работы:** измерить с помощью микрометра средний объём металлического цилиндра. Рассчитать абсолютную и относительную погрешности измерения.

**Приборы и принадлежности:** микрометр и металлический цилиндр.

Таблица 1

Измерение среднего объёма цилиндра.

№ изм.	h, мм	d, мм	V, мм <sup>3</sup>	Примечания
1	14,36	9,37	996,05	Образец - металлический цилиндр. Серия измерения №1. Наименьшее деление микрометра 0,01мм.
2	14,36	9,38		
3	14,36	9,41		
4	14,36	9,41		
5	14,36	9,42		
Ср.знач.	14,36	9,398		

### Расчётные формулы:

$$V = \frac{\pi d^2}{4} h - \text{формула нахождения среднего объёма цилиндра;}$$

### **Расчёт ошибок прямых измерений.**

1. Вычисляем средние арифметические значения по формуле:

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{n}$$

2. Вычисляем среднюю квадратичную погрешность для каждой величины по формуле:

$$\sigma_{\bar{x}} = \sqrt{\sum_{i=1}^n \frac{(\bar{x} - x_i)^2}{n(n-1)}}$$

3. По таблице Стьюдента для доверительной вероятности 0,95 и числа измерений n определяем  $t_{\alpha n}$

4. Вычисляем случайные погрешности по формуле:

$$\Delta x_{сл} = t_{\alpha n} \cdot \sigma_{\bar{x}}$$

5. Вычисляем приборную погрешность по формуле:

$$\Delta x_u = \alpha \cdot h$$

6. Рассчитываем полные погрешности измерений по формуле:

$$\Delta x = \sqrt{\Delta x_{сл}^2 + \Delta x_u^2}$$

7. Записываем окончательные результаты с округлением в виде:

$$x_0 = \bar{x} \pm \Delta x$$

8. Рассчитываем относительные погрешности измерений:

$$\varepsilon(x) = \frac{\Delta x}{x_0} \cdot 100\%$$

### **Расчет ошибок косвенных измерений.**

1. Вычисляем среднее значение функции по формуле:

$$V_{cp} = \frac{\pi \bar{d}^2}{4} h$$



2. Выводим расчетную формулу для абсолютной погрешности косвенной величины по формуле:

$$\Delta V = \sqrt{\left(\frac{\partial V}{\partial d}\right)^2 \Delta d^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial h}\right)^2 \Delta h^2} = \sqrt{\left(\frac{\pi d h}{2}\right)^2 \Delta d^2 + \left(\frac{\pi d^2}{4}\right)^2 \Delta h^2}$$

3. Записываем окончательный результат с учетом округлений в виде:

$$V = \bar{V} \pm \Delta V$$

4. Рассчитать относительную погрешность косвенных измерений по формуле:

$$\varepsilon(V) = \frac{\Delta V}{\bar{V}} \cdot 100\%$$

Таблица 2.

Погрешности прямых измерений.

$\sigma(\bar{d}), м$	$\Delta d_{сл}, м$	$\Delta d_n, м$	$\Delta d, м$	$d_0, м$	$\varepsilon(d)$
0,009695	0,02695	0,00475	0,02858	9,37063	0,29%

Таблица 3.

Погрешности косвенных измерений.

$\bar{V}, м^3$	$\Delta V, м^3$	$V, м^3$	$\varepsilon(V)$
996	6	990	1%

Окончательный результат с учётом округлений в соответствии с таблицей 3:

$$V = \bar{V} \pm \Delta V = (996 \pm 6) мм^3$$

**Вывод:** в результате выполнения лабораторной работы научились измерять размеры тела при помощи микрометра, а также приобрели навыки вычисления по полученным данным объёма данного тела, расчета погрешностей прямых и косвенных измерений.

### Практическая работа № 3-4

**Тема:** Нахождение произведения матриц и вычисление их определителя.

**Цель работы:** 1. Отработать навыки выполнения математических действий над матрицами.

2. Отработать навыки вычисления определителей.

**Оснащенность:** канцелярские принадлежности, калькулятор.

**Контрольные вопросы:**

1. Что называют матрицей?
2. Какие бывают матрицы?
3. Как выполнять арифметические действия над матрицами?
4. Способы вычисления определителей.

#### Методические указания

(краткая теория)

*Матрицей* называется множество чисел, образующих прямоугольную таблицу, которая содержит m строк и n столбцов. (m×n – размер матрицы).

Виды матриц: прямоугольные (m>n, m<n), квадратные (m=n).

Матрицы можно складывать, вычитать, умножать на число и перемножать. Делить матрицы нельзя.

$$= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}; \text{элементы } a_{11}, a_{22}, a_{33}, \dots, a_{nn} - \text{называют главной диагональю.}$$

Побочная диагональ проходит, через верхний правый и нижний правый углы. При сложении (вычитании) матриц, складываются (вычитаются) только элементы, стоящие на одних местах, т.е.  $a_{11}+b_{11}$  и т.д.

При умножении двух матриц  $A \times B$ , получается новая матрица  $C$  такая, что  $c_{ij}=a_{i,1} \times b_{1,j} + a_{i,2} \times b_{2,j} + \dots + a_{i,n} \times b_{n,j}$ , т.е.  $C_{ij}$  равно сумме элементов  $i$ -ой строки матрицы  $A$  на соответствующие элементы  $j$ -го столбца матрицы  $B$ .

Понятие **определителя** тесно связано с понятием квадратной матрицы.

**Определитель** квадратной матрицы – это число, поставленное в соответствие данной матрицы.

$$\Delta = d = \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Вычисление определителей:

1. Определитель второго порядка равен разности произведений элементов главной и побочной диагоналей.

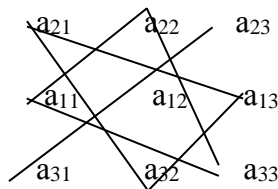
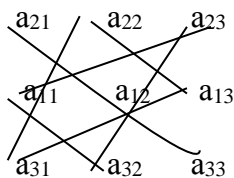
$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

2. Определитель третьего порядка.

а) Вычисление определителя третьего порядка выполняют по правилу треугольника, которое изложено в учебнике и может быть проиллюстрировано рисунком.

« + »

« - »



в) Разложением по элементам строки или столбца. Более подробно этот способ излагается в учебнике.

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}, \quad \text{разложение}$$

определителя по первой строке.

### Задание 1

$$1. A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 4 & 5 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$2. A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 4 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 4 & 6 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$3. A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 3 & 5 \\ 4 & 2 & 6 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 4 & 5 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$4. A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 3 \\ 4 & 3 & -5 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 4 & 5 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$5. A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 4 & 6 & 5 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 4 & 5 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$6. A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 4 & 6 & 3 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

$$7. A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 4 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$8. A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 3 & 5 & 5 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -4 \\ 4 & 5 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$9. A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 4 & 4 & 5 \\ 1 & 7 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 4 & 5 & 3 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$10. A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & -3 & 5 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 4 \\ 4 & 5 & 3 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

## Задание 2

$$1. A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$2. A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$3. A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$4. A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$5. A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -2 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$6. A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 3 & -3 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$7. A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$8. A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 1 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}$$

$$9. A = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$$

$$10. A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

### Задание 3

$$1. a) \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}, b) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}.$$

$$2. a) \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 5 \end{vmatrix}, b) \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \end{vmatrix}.$$

$$3. a) \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 5 \end{vmatrix}, b) \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \end{vmatrix}.$$

$$4. a) \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -5 \end{vmatrix}, b) \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \end{vmatrix}.$$

$$5. A) \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}, b) \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & -3 \end{vmatrix}.$$

$$6. a) \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 1 & 6 \end{vmatrix}, b) \begin{vmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 2 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \end{vmatrix}.$$

$$7. a) \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -2 & 5 \end{vmatrix}, b) \begin{vmatrix} 1 & 3 & -4 \\ 2 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix}.$$

$$8. A) \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 5 \end{vmatrix}, b) \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & -2 & 1 \\ 3 & 6 & 3 \end{vmatrix}.$$

$$9. a) \begin{vmatrix} 2 & -6 \\ 1 & 5 \end{vmatrix}, b) \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & -4 & 1 \\ 3 & -2 & 3 \end{vmatrix}.$$

$$10. \text{ а) } \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 1 & 5 \end{vmatrix}, \text{ б) } \begin{vmatrix} 1 & 4 & 4 \\ 2 & 5 & 1 \\ -3 & 1 & 3 \end{vmatrix}.$$

### Ход работы:

1. Познакомиться с методическими указаниями.
2. Задания №1 (вариант по номеру в журнале): Найти: а)  $A+B$ , б)  $A-B$ , в)  $2A+3B$ ; г)  $3A-2B$
3. Задания №2 (вариант по номеру в журнале): Найти: а)  $A*B$ , б)  $B*A$
4. Задания №3 (вариант по номеру в журнале): Вычислить предложенные определители (задание б методом треугольника и разложением)
5. Сделать вывод по работе и оформить отчёт.

## Практическая работа № 5

Тема: Вычисление обратной матрицы

Тема: Решение систем линейных уравнений методом обратной матрицы.

Цели:

1. Изучить понятие матрицы, действия над матрицами.
2. Научиться вычислять определители второго и третьего порядков.
3. Изучить методы решения СЛАУ.

Оснащенность: Канцелярские принадлежности.

Контрольные вопросы:

1. Что такое матрица?
2. Как производятся действия над матрицами?
3. Что называют определителем второго, третьего порядка?

Методические указания

Краткая теория

Система линейных уравнений имеет вид:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2, \\ \dots & \dots \dots \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m1}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &= b_m. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь  $a_{ij}$  и  $b_i$  ( $i = \overline{1, m}; j = \overline{1, n}$ ) - заданные, а  $x_j$  - неизвестные действительные числа.

Упорядоченная совокупность  $n$  вещественных чисел  $(c_1, c_2, \dots, c_n)$  называется *решением системы* (5.1), если в результате подстановки этих чисел вместо соответствующих переменных  $x_1, x_2, \dots, x_n$  каждое уравнение системы обратится в арифметическое тождество; другими словами, если существует вектор  $C = (c_1, c_2, \dots, c_n)^T$  такой, что  $AC = B$ . Система (1) называется *совместной*, или *разрешимой*, если она имеет по крайней мере одно решение. Система называется *несовместной*, или *неразрешимой*, если она не имеет решений.

Матрица

$$\vec{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix},$$

образованная путем приписывания справа к матрице  $A$  коэффициентов столбца свободных членов, называется *расширенной матрицей системы*.

**Теорема Кронекера-Капелли.** Система линейных уравнений совместна тогда и только тогда, когда ранги матриц  $A$  и  $\bar{A}$  совпадают, т.е.

$$r(A) = r(\bar{A}) = r.$$

#### Метод Крамера

Находим *главный определитель системы*, т.е. определитель матрицы  $A$ :  $\Delta = \det(a_{ij})$

и  $n$  *вспомогательных определителей*  $\Delta_i$  ( $i = \overline{1, n}$ ), которые получаются из определителя  $\Delta$  заменой  $i$ -го столбца столбцом свободных членов.

Если главный определитель системы отличен от нуля, то система имеет единственное решение, определяемое по формулам:  $x_i = \Delta_i / \Delta$ .

Если главный определитель системы  $\Delta$  и все вспомогательные определители  $\Delta_i = 0$  ( $i = \overline{1, n}$ ), то система имеет бесчисленное множество решений. Если главный определитель системы  $\Delta = 0$ , а хотя бы один вспомогательный определитель отличен от нуля, то система несовместна.

Пример Решить систему уравнений методом Гаусса:

$$\begin{aligned} x + y - 3z &= 2, \\ 3x - 2y + z &= -1, \\ 2x + y - 2z &= 0. \end{aligned}$$

*Решение.* Выпишем расширенную матрицу данной системы

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & 2 \\ 3 & -2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

и произведем следующие элементарные преобразования над ее строками:

а) из ее второй и третьей строк вычтем первую, умноженную соответственно на 3 и 2:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & 2 \\ 3 & -2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & -5 & 10 & -7 \\ 2 & 1 & 4 & -4 \end{pmatrix};$$

б) третью строку умножим на  $(-5)$  и прибавим к ней вторую:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & -5 & 10 & -7 \\ 0 & 0 & -10 & 13 \end{pmatrix}.$$

В результате всех этих преобразований данная система приводится к треугольному виду:

$$\begin{aligned} x + y - 3z &= 2, \\ -5y + 10z &= -7, \\ -10z &= 13. \end{aligned}$$

Из последнего уравнения находим  $z = -1,3$ . Подставляя это значение во второе уравнение, имеем  $y = -1,2$ . Далее из первого уравнения получим  $x = -0,7$ .

Ход работы:

1. Изучить краткую теорию, ответить на контрольные вопросы.
2. Выполнить указанные задания.
3. Сделать выводы о проделанной работе.

Задание 1: Решить (по вариантам):

$$\begin{array}{lll}
1) \begin{cases} 2x_3 + 5x_2 + x_1 = 3, \\ 2x_1 + 9x_2 + 5x_3 = 12, \\ -x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 9. \end{cases} & 2) \begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = -7, \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = -1, \\ 2x_1 - 4x_2 = -5. \end{cases} & 3) \begin{cases} 7x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 15, \\ 5x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 15, \\ 10x_1 - 11x_2 + 5x_3 = 36. \end{cases} \\
4) \begin{cases} 2x_1 + x_2 = 5, \\ x_1 + 3x_3 = 16, \\ 5x_2 - x_3 = 10. \end{cases} & 5) \begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 = 6, \\ 2x_1 + 3x_2 - 7x_3 = 16, \\ 5x_1 + 2x_2 + x_3 = 16. \end{cases} & 6) \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 5, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 6, \\ x_1 + 5x_2 = -3. \end{cases} \\
7) \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 22, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 47, \\ x_1 + 3x_2 - x_3 = 18. \end{cases} & 8) \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 2, \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = -5, \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = 3. \end{cases} & 9) \begin{cases} 6x_1 + x_2 + 3x_3 = -1, \\ -2x_1 - 5x_2 + 2x_3 = 6, \\ 3x_1 + 2x_3 = 1. \end{cases} \\
10) \begin{cases} -3x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 5, \\ 2x_1 - 4x_2 - 3x_3 = -6, \\ x_1 + 6x_2 + x_3 = 17. \end{cases} & 11) \begin{cases} 1x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 3, \\ 2x_1 + 9x_2 + 5x_3 = 12, \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 = -9. \end{cases} & 12) \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 = -2, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ 2x_1 - 3x_2 - 3x_3 = 10. \end{cases} \\
13) \begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 3, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 9. \end{cases} & 14) \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 1, \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 1, \\ 5x_1 + x_3 = -1. \end{cases} & 15) \begin{cases} 2x_1 - 5x_2 - x_3 = -1, \\ 3x_1 + x_3 = -4, \\ 4x_1 + x_2 + 2x_3 = -5. \end{cases} \\
16) \begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = -5, \\ x_2 - 2x_3 = 4, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = -1. \end{cases} & 17) \begin{cases} x_1 + 2x_2 = -1, \\ -3x_1 + x_3 = -2, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 1. \end{cases} & 18) \begin{cases} x_1 + 2x_3 = 1, \\ 3x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 - 5x_2 = 0. \end{cases}
\end{array}$$

## Практическая работа № 6

Тема: Вычисление систем 2-го порядка

Цели:

1. Изучить понятие матрицы, действия над матрицами.
2. Научиться вычислять определители второго и третьего порядков.
3. Изучить методы решения СЛАУ.
4. Научиться решать СЛАУ методом Крамера.

Оснащенность: Канцелярские принадлежности.

Контрольные вопросы:

1. Что такое матрица?
2. Как производятся действия над матрицами?
3. Что называют определителем второго, третьего порядка?
4. Какими свойствами обладает определитель?
5. Что такое СЛАУ?
6. Какая система называется совместной, разрешимой?
7. В чем заключается алгоритм метода Крамера?

## Методические указания

### Краткая теория

*Прямоугольной матрицей* размера  $m \times n$  называется совокупность  $mn$  чисел, расположенных в виде прямоугольной таблицы, содержащей  $m$  строк и  $n$  столбцов. Мы будем записывать матрицу в виде

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad (1)$$

### Определители. Свойства определителей.

Определителем второго порядка матрицы  $A$  называется число, равное  $a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$$

Определителем третьего порядка матрицы  $A$  называется число, равное

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

#### *Свойства определителей*

1. Определитель не меняется при транспонировании.
2. Если одна из строк определителя состоит из нулей, то определитель равен нулю.
3. Если в определителе переставить две строки, определитель поменяет знак.
4. Определитель, содержащий две одинаковые строки, равен нулю.
5. Если все элементы некоторой строки определителя умножить на некоторое число  $k$ , то сам определитель умножится на  $k$ .
6. Определитель, содержащий две пропорциональные строки, равен нулю.

*Система линейных уравнений* имеет вид:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2, \\ \dots & \dots \dots \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &= b_m. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь  $a_{ij}$  и  $b_i$  ( $i = \overline{1, m}; j = \overline{1, n}$ ) - заданные, а  $x_j$  - неизвестные действительные числа.

Упорядоченная совокупность  $n$  вещественных чисел  $(c_1, c_2, \dots, c_n)$  называется *решением системы* (5.1), если в результате подстановки этих чисел вместо соответствующих переменных  $x_1, x_2, \dots, x_n$  каждое уравнение системы обратится в арифметическое тождество; другими словами, если существует вектор  $C = (c_1, c_2, \dots, c_n)^T$  такой, что  $AC \square B$ .

Система (1) называется *совместной*, или *разрешимой*, если она имеет по крайней мере одно решение. Система называется *несовместной*, или *неразрешимой*, если она не имеет решений.

Матрица

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix},$$

образованная путем приписывания справа к матрице  $A$  коэффициентов столбца свободных членов, называется *расширенной матрицей системы*.



**Теорема Кронекера-Капелли.** Система линейных уравнений совместна тогда и только тогда, когда ранги матриц  $A$  и  $\square A$  совпадают, т.е.  
 $r(A) = r(\square A) = r$ .

#### Метод Крамера

Находим главный определитель системы, т.е. определитель матрицы  $A$ :  $\square = \det(a_{ij})$

и  $n$  вспомогательных определителей  $\square_i$  ( $i = \overline{1, n}$ ), которые получаются из определителя  $\square$  заменой  $i$ -го столбца столбцом свободных членов.

Если главный определитель системы отличен от нуля, то система имеет единственное решение, определяемое по формулам:  $x_i = \square_i / \square$ .

Если главный определитель системы  $\square$  и все вспомогательные определители  $\square_i = 0$  ( $i = \overline{1, n}$ ), то система имеет бесчисленное множество решений. Если главный определитель системы  $\square = 0$ , а хотя бы один вспомогательный определитель отличен от нуля, то система несовместна.

Пример 5.2. Решить методом Крамера систему уравнений:

$$\begin{cases} 5x_1 + 3x_2 = 12, \\ 2x_1 - x_2 = 7. \end{cases}$$

*Решение.* Главный определитель этой системы

$$\Delta = \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -11 \neq 0,$$

значит, система имеет единственное решение. Вычислим вспомогательные определители  $\square_1$  и  $\square_2$ , получающиеся из определителя  $\square$  путем замены в нем столбца, состоящего из коэффициентов при  $x_i$ , столбцом из свободных членов:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 12 & 3 \\ 7 & -1 \end{vmatrix} = -33 \quad \text{и} \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 5 & 12 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} = 11$$

Отсюда  $x_1 = \square_1 / \square = 3$ ,  $x_2 = \square_2 / \square = -1$ , решение системы - вектор  $C = (3, -1)$ .

#### Метод Гаусса

Сущность этого метода состоит в том, что посредством последовательных исключений неизвестных данная система превращается в ступенчатую (в частности, треугольную) систему, равносильную данной..

Пример 5.4. Решить систему уравнений методом Гаусса:

$$\begin{cases} x + y - 3z = 2, \\ 3x - 2y + z = -1, \\ 2x + y - 2z = 0. \end{cases}$$

*Решение.* Выпишем расширенную матрицу данной системы

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & 2 \\ 3 & -2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

и произведем следующие элементарные преобразования над ее строками:

а) из ее второй и третьей строк вычтем первую, умноженную соответственно на 3 и 2:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & 2 \\ 3 & -2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & -5 & 10 & -7 \\ 2 & 1 & 4 & -4 \end{pmatrix};$$

б) третью строку умножим на (-5) и прибавим к ней вторую:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & -5 & 10 & -7 \\ 0 & 0 & -10 & 13 \end{pmatrix}.$$

В результате всех этих преобразований данная система приводится к треугольному виду:

$$\begin{aligned} x + y - 3z &= 2, \\ -5y + 10z &= -7, \\ -10z &= 13. \end{aligned}$$

Из последнего уравнения находим  $z = -1,3$ . Подставляя это значение во второе уравнение, имеем  $y = -1,2$ . Далее из первого уравнения получим  $x = -0,7$ .

#### Ход работы:

4. Изучить краткую теорию, ответить на контрольные вопросы.
5. Выполнить указанные задания.
6. Сделать выводы о проделанной работе.

**Задание 1:** Решить методом Крамера (по вариантам):

1) $\begin{cases} 2x_3 + 5x_2 + x_1 = 3, \\ 2x_1 + 9x_2 + 5x_3 = 12, \\ -x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 9. \end{cases}$	2) $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = -7, \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = -1, \\ 2x_1 - 4x_2 = -5. \end{cases}$	3) $\begin{cases} 7x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 15, \\ 5x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 15, \\ 10x_1 - 11x_2 + 5x_3 = 36. \end{cases}$
4) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 5, \\ x_1 + 3x_3 = 16, \\ 5x_2 - x_3 = 10. \end{cases}$	5) $\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 = 6, \\ 2x_1 + 3x_2 - 7x_3 = 16, \\ 5x_1 + 2x_2 + x_3 = 16. \end{cases}$	6) $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 5, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 6, \\ x_1 + 5x_2 = -3. \end{cases}$
7) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 22, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 47, \\ x_1 + 3x_2 - x_3 = 18. \end{cases}$	8) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 2, \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = -5, \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = 3. \end{cases}$	9) $\begin{cases} 6x_1 + x_2 + 3x_3 = -1, \\ -2x_1 - 5x_2 + 2x_3 = 6, \\ 3x_1 + 2x_3 = 1. \end{cases}$
10) $\begin{cases} -3x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 5, \\ 2x_1 - 4x_2 - 3x_3 = -6, \\ x_1 + 6x_2 + x_3 = 17. \end{cases}$	11) $\begin{cases} 1x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 3, \\ 2x_1 + 9x_2 + 5x_3 = 12, \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 = -9. \end{cases}$	12) $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 = -2, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ 2x_1 - 3x_2 - 3x_3 = 10. \end{cases}$
13) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 3, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 9. \end{cases}$	14) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 1, \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 1, \\ 5x_1 + x_3 = -1. \end{cases}$	15) $\begin{cases} 2x_1 - 5x_2 - x_3 = -1, \\ 3x_1 + x_3 = -4, \\ 4x_1 + x_2 + 2x_3 = -5. \end{cases}$
16) $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = -5, \\ x_2 - 2x_3 = 4, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = -1. \end{cases}$	17) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 = -1, \\ -3x_1 + x_3 = -2, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 1. \end{cases}$	18) $\begin{cases} x_1 + 2x_3 = 1, \\ 3x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 - 5x_2 = 0. \end{cases}$

## Тема: Вычисление СЛАУ

### Цели:

1. Изучить понятие матрицы, действия над матрицами.
2. Научиться вычислять определители второго и третьего порядков.
3. Изучить методы решения СЛАУ.
4. Научиться решать СЛАУ методом Крамера.

Оснащенность: Канцелярские принадлежности.

### Контрольные вопросы:

1. Что такое матрица?
2. Как производятся действия над матрицами?
3. Что называют определителем второго, третьего порядка?
4. Какими свойствами обладает определитель?
5. Что такое СЛАУ?
6. Какая система называется совместной, разрешимой?
7. В чем заключается алгоритм метода Крамера?

## Методические указания

### Краткая теория

*Прямоугольной матрицей* размера  $m \times n$  называется совокупность  $mn$  чисел, расположенных в виде прямоугольной таблицы, содержащей  $m$  строк и  $n$  столбцов. Мы будем записывать матрицу в виде

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad (1)$$

### Определители. Свойства определителей.

Определителем второго порядка матрицы  $A$  называется число, равное  $a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$$

Определителем третьего порядка матрицы  $A$  называется число, равное

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

### *Свойства определителей*

1. Определитель не меняется при транспонировании.
2. Если одна из строк определителя состоит из нулей, то определитель равен нулю.
3. Если в определителе переставить две строки, определитель поменяет знак.
4. Определитель, содержащий две одинаковые строки, равен нулю.
5. Если все элементы некоторой строки определителя умножить на некоторое число  $k$ , то сам определитель умножится на  $k$ .
6. Определитель, содержащий две пропорциональные строки, равен нулю.

*Система линейных уравнений* имеет вид:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2, \\ \dots & \dots \end{aligned} \quad (1)$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m.$$

Здесь  $a_{ij}$  и  $b_i$  ( $i = \overline{1, m}; j = \overline{1, n}$ ) - заданные, а  $x_j$  - неизвестные действительные числа.

Упорядоченная совокупность  $n$  вещественных чисел  $(c_1, c_2, \dots, c_n)$  называется *решением системы* (5.1), если в результате подстановки этих чисел вместо соответствующих переменных  $x_1, x_2, \dots, x_n$  каждое уравнение системы обратится в арифметическое тождество; другими словами, если существует вектор  $C = (c_1, c_2, \dots, c_n)^T$  такой, что  $AC = B$ .

Система (1) называется *совместной*, или *разрешимой*, если она имеет по крайней мере одно решение. Система называется *несовместной*, или *неразрешимой*, если она не имеет решений.

Матрица

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix},$$

образованная путем приписывания справа к матрице  $A$  коэффициентов столбца свободных членов, называется *расширенной матрицей системы*.

**Теорема Кронекера-Капелли.** Система линейных уравнений совместна тогда и только тогда, когда ранги матриц  $A$  и  $\bar{A}$  совпадают, т.е.  $r(A) = r(\bar{A}) = r$ .

#### Метод Крамера

Находим *главный определитель системы*, т.е. определитель матрицы  $A$ :  $\Delta = \det(a_{ij})$

и  $n$  *вспомогательных определителей*  $\Delta_i$  ( $i = \overline{1, n}$ ), которые получаются из определителя  $\Delta$  заменой  $i$ -го столбца столбцом свободных членов.

Если главный определитель системы отличен от нуля, то система имеет единственное решение, определяемое по формулам:  $x_i = \Delta_i / \Delta$ .

Если главный определитель системы  $\Delta = 0$  и все вспомогательные определители  $\Delta_i = 0$  ( $i = \overline{1, n}$ ), то система имеет бесчисленное множество решений. Если главный определитель системы  $\Delta = 0$ , а хотя бы один вспомогательный определитель отличен от нуля, то система несовместна.

**Пример 5.2.** Решить методом Крамера систему уравнений:

$$\begin{cases} 5x_1 + 3x_2 = 12, \\ 2x_1 - x_2 = 7. \end{cases}$$

*Решение.* Главный определитель этой системы

$$\Delta = \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -11 \neq 0,$$

значит, система имеет единственное решение. Вычислим вспомогательные определители  $\Delta_1$  и  $\Delta_2$ , получающиеся из определителя  $\Delta$  путем замены в нем столбца, состоящего из коэффициентов при  $x_i$ , столбцом из свободных членов:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 12 & 3 \\ 7 & -1 \end{vmatrix} = -33 \quad \text{и} \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 5 & 12 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} = 11$$

Отсюда  $x_1 = \Delta_1 / \Delta = 3$ ,  $x_2 = \Delta_2 / \Delta = -1$ , решение системы - вектор  $C = (3, -1)$ .

#### Метод Гаусса

Сущность этого метода состоит в том, что посредством последовательных исключений неизвестных данная система превращается в ступенчатую (в частности, треугольную) систему, равносильную данной..

**Пример 5.4.** Решить систему уравнений методом Гаусса:

$$\begin{aligned}x + y - 3z &= 2, \\ 3x - 2y + z &= -1, \\ 2x + y - 2z &= 0.\end{aligned}$$

*Решение.* Выпишем расширенную матрицу данной системы

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & 2 \\ 3 & -2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

и произведем следующие элементарные преобразования над ее строками:

а) из ее второй и третьей строк вычтем первую, умноженную соответственно на 3 и 2:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & 2 \\ 3 & -2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & -5 & 10 & -7 \\ 2 & 1 & 4 & -4 \end{pmatrix};$$

б) третью строку умножим на (-5) и прибавим к ней вторую:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & -5 & 10 & -7 \\ 0 & 0 & -10 & 13 \end{pmatrix}.$$

В результате всех этих преобразований данная система приводится к треугольному виду:

$$\begin{aligned}x + y - 3z &= 2, \\ -5y + 10z &= -7, \\ -10z &= 13.\end{aligned}$$

Из последнего уравнения находим  $z = -1,3$ . Подставляя это значение во второе уравнение, имеем  $y = -1,2$ . Далее из первого уравнения получим  $x = -0,7$ .

#### Ход работы:

7. Изучить краткую теорию, ответить на контрольные вопросы.
8. Выполнить указанные задания.
9. Сделать выводы о проделанной работе.

**Задание 1:** Решить методом Крамера (по вариантам):

1) $\begin{cases} 2x_3 + 5x_2 + x_1 = 3, \\ 2x_1 + 9x_2 + 5x_3 = 12, \\ -x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 9. \end{cases}$	2) $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = -7, \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = -1, \\ 2x_1 - 4x_2 = -5. \end{cases}$	3) $\begin{cases} 7x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 15, \\ 5x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 15, \\ 10x_1 - 11x_2 + 5x_3 = 36. \end{cases}$
4) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 5, \\ x_1 + 3x_3 = 16, \\ 5x_2 - x_3 = 10. \end{cases}$	5) $\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 = 6, \\ 2x_1 + 3x_2 - 7x_3 = 16, \\ 5x_1 + 2x_2 + x_3 = 16. \end{cases}$	6) $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 5, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 6, \\ x_1 + 5x_2 = -3. \end{cases}$
7) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 22, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 47, \\ x_1 + 3x_2 - x_3 = 18. \end{cases}$	8) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 2, \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = -5, \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = 3. \end{cases}$	9) $\begin{cases} 6x_1 + x_2 + 3x_3 = -1, \\ -2x_1 - 5x_2 + 2x_3 = 6, \\ 3x_1 + 2x_3 = 1. \end{cases}$
10) $\begin{cases} -3x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 5, \\ 2x_1 - 4x_2 - 3x_3 = -6, \\ x_1 + 6x_2 + x_3 = 17. \end{cases}$	11) $\begin{cases} 1x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 3, \\ 2x_1 + 9x_2 + 5x_3 = 12, \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 = -9. \end{cases}$	12) $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 = -2, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ 2x_1 - 3x_2 - 3x_3 = 10. \end{cases}$

$$\begin{array}{lll}
13) \begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 3, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 9. \end{cases} & 14) \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 1, \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 1, \\ 5x_1 + x_3 = -1. \end{cases} & 15) \begin{cases} 2x_1 - 5x_2 - x_3 = -1, \\ 3x_1 + x_3 = -4, \\ 4x_1 + x_2 + 2x_3 = -5. \end{cases} \\
16) \begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = -5, \\ x_2 - 2x_3 = 4, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = -1. \end{cases} & 17) \begin{cases} x_1 + 2x_2 = -1, \\ -3x_1 + x_3 = -2, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 1. \end{cases} & 18) \begin{cases} x_1 + 2x_3 = 1, \\ 3x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 - 5x_2 = 0. \end{cases}
\end{array}$$

## Практическая работа № 8

Тема: Вычисление обратной матрицы.

Цель работы:

1. Отработать навыки выполнения математических действий над матрицами.
2. Отработать навыки вычисления определителей.

Оснащенность: канцелярские принадлежности, калькулятор.

Контрольные вопросы:

1. Что называют матрицей?
2. Какие бывают матрицы?
3. Как выполнять арифметические действия над матрицами?
4. Способы вычисления определителей.

### Методические указания

( краткая теория)

*Матрицей* называется множество чисел, образующих прямоугольную таблицу, которая содержит  $m$  строк и  $n$  столбцов. ( $m \times n$  – размер матрицы).

Виды матриц: прямоугольные ( $m > n$ ,  $m < n$ ), квадратные ( $m = n$ ).

Матрицы можно складывать, вычитать, умножать на число и перемножать. Делить матрицы нельзя.

$$= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}; \text{элементы } a_{11}, a_{22}, a_{33}, \dots, a_{nn} - \text{называют главной диагональю.}$$

Побочная диагональ проходит, через верхний правый и нижний правый углы. При сложении (вычитании) матриц, складываются (вычитаются) только элементы, стоящие на одних местах, т.е.  $a_{11} + b_{11}$  и т.д.

При умножении двух матриц  $A \times B$ , получается новая матрица  $C$  такая, что  $c_{ij} = a_{i,1} \times b_{1,j} + a_{i,2} \times b_{2,j} + \dots + a_{i,n} \times b_{n,j}$ , т.е.  $C_{ij}$  равно сумме элементов  $i$ -ой строки матрицы  $A$  на соответствующие элементы  $j$ -го столбца матрицы  $B$ .

Понятие **определителя** тесно связано с понятием квадратной матрицы.

**Определитель** квадратной матрицы – это число, поставленное в соответствие данной матрицы.

$$\Delta = d = \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Вычисление определителей:

2. Определитель второго порядка равен разности произведений элементов главной и побочной диагоналей.

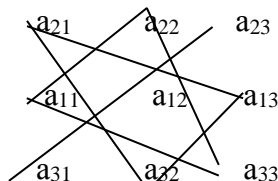
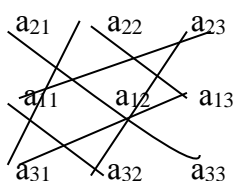
$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

2. Определитель третьего порядка.

а) Вычисление определителя третьего порядка выполняют по правилу треугольника, которое изложено в учебнике и может быть проиллюстрировано рисунком.

« + »

« - »



в) Разложением по элементам строки или столбца. Более подробно этот способ излагается в учебнике.

$$\text{Det } A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}, \quad \text{разложение}$$

определителя по первой строке.

### Задание 1.

$$1. A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 4 & 5 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$2. A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 4 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 4 & 6 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$3. A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 3 & 5 \\ 4 & 2 & 6 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 4 & 5 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$4. A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 3 \\ 4 & 3 & -5 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 4 & 5 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$5. A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 4 & 6 & 5 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 4 & 5 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$6. A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 4 & 6 & 3 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

$$7. A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 4 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$8. A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 3 & 5 & 5 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -4 \\ 4 & 5 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$9. A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 4 & 4 & 5 \\ 1 & 7 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 4 & 5 & 3 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$10. A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & -3 & 5 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 4 \\ 4 & 5 & 3 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

## Задание 2.

$$1. A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$2. A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$3. A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$4. A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$5. A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -2 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$6. A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 3 & -3 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$7. A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$8. A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 1 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}$$

$$9. A = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$$



$$10. A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

### Задание 3.

$$1. a) \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}, б) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}.$$

$$2. a) \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 5 \end{vmatrix}, б) \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \end{vmatrix}.$$

$$3. a) \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 5 \end{vmatrix}, б) \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \end{vmatrix}.$$

$$4. a) \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -5 \end{vmatrix}, б) \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \end{vmatrix}.$$

$$5. A) \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}, б) \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & -3 \end{vmatrix}.$$

$$6. a) \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 1 & 6 \end{vmatrix}, б) \begin{vmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 2 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \end{vmatrix}.$$

$$7. a) \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -2 & 5 \end{vmatrix}, б) \begin{vmatrix} 1 & 3 & -4 \\ 2 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix}.$$

$$8. A) \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 5 \end{vmatrix}, б) \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & -2 & 1 \\ 3 & 6 & 3 \end{vmatrix}.$$

$$9. a) \begin{vmatrix} 2 & -6 \\ 1 & 5 \end{vmatrix}, б) \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & -4 & 1 \\ 3 & -2 & 3 \end{vmatrix}.$$

$$10. a) \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 1 & 5 \end{vmatrix}, б) \begin{vmatrix} 1 & 4 & 4 \\ 2 & 5 & 1 \\ -3 & 1 & 3 \end{vmatrix}.$$

### Ход работы:

1. Познакомиться с методическими указаниями.
2. Задания №1 (вариант по номеру в журнале): Найти: а)  $A + B$ , б)  $A - B$ , в)  $2A + 3B$ ; г)  $3A - 2B$
3. Задания №2 (вариант по номеру в журнале): Найти: а)  $A * B$ , б)  $B * A$
- 4.. Задания №3 (вариант по номеру в журнале): Вычислить предложенные определители (задание б методом треугольника и разложением)
5. Сделать вывод по работе и оформить отчёт.

## Практическая работа № 9

Тема: Работа с формулой Крамера.

Цели:

1. Изучить понятие матрицы, действия над матрицами.
2. Научиться вычислять определители второго и третьего порядков.
3. Изучить методы решения СЛАУ.
4. Научиться решать СЛАУ методом Крамера.

Оснащенность: Канцелярские принадлежности.

Контрольные вопросы:

1. Что такое матрица?
2. Как производятся действия над матрицами?
3. Что называют определителем второго, третьего порядка?
4. Какими свойствами обладает определитель?
5. Что такое СЛАУ?
6. Какая система называется совместной, разрешимой?
7. В чем заключается алгоритм метода Крамера?

### Методические указания

#### Краткая теория

*Прямоугольной матрицей* размера  $m \times n$  называется совокупность  $mn$  чисел, расположенных в виде прямоугольной таблицы, содержащей  $m$  строк и  $n$  столбцов. Мы будем записывать матрицу в виде

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad (1)$$

#### Определители. Свойства определителей.

Определителем второго порядка матрицы  $A$  называется число, равное  $a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$$

Определителем третьего порядка матрицы  $A$  называется число, равное

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

#### *Свойства определителей*

1. Определитель не меняется при транспонировании.
2. Если одна из строк определителя состоит из нулей, то определитель равен нулю.
3. Если в определителе переставить две строки, определитель поменяет знак.
4. Определитель, содержащий две одинаковые строки, равен нулю.
5. Если все элементы некоторой строки определителя умножить на некоторое число  $k$ , то сам определитель умножится на  $k$ .
6. Определитель, содержащий две пропорциональные строки, равен нулю.

*Система линейных уравнений* имеет вид:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2, \\ \dots & \dots \dots \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &= b_m. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь  $a_{ij}$  и  $b_i$  ( $i = \overline{1, m}; j = \overline{1, n}$ ) - заданные, а  $x_j$  - неизвестные действительные числа.

Упорядоченная совокупность  $n$  вещественных чисел  $(c_1, c_2, \dots, c_n)$  называется *решением системы* (5.1), если в результате подстановки этих чисел вместо соответствующих переменных  $x_1, x_2, \dots, x_n$  каждое уравнение системы обратится в

арифметическое тождество; другими словами, если существует вектор  $C = (c_1, c_2, \dots, c_n)^T$  такой, что  $AC = B$ .

Система (1) называется *совместной*, или *разрешимой*, если она имеет по крайней мере одно решение. Система называется *несовместной*, или *неразрешимой*, если она не имеет решений.

Матрица

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix},$$

образованная путем приписывания справа к матрице  $A$  коэффициентов столбца свободных членов, называется *расширенной матрицей системы*.

**Теорема Кронекера-Капелли.** Система линейных уравнений совместна тогда и только тогда, когда ранги матриц  $A$  и  $\bar{A}$  совпадают, т.е.  $r(A) = r(\bar{A}) = r$ .

#### Метод Крамера

Находим *главный определитель системы*, т.е. определитель матрицы  $A$ :  $\Delta = \det(a_{ij})$

и *n* *вспомогательных определителей*  $\Delta_i$  ( $i = \overline{1, n}$ ), которые получаются из определителя  $\Delta$  заменой  $i$ -го столбца столбцом свободных членов.

Если главный определитель системы отличен от нуля, то система имеет единственное решение, определяемое по формулам:  $x_i = \Delta_i / \Delta$ .

Если главный определитель системы  $\Delta = 0$  и все вспомогательные определители  $\Delta_i = 0$  ( $i = \overline{1, n}$ ), то система имеет бесчисленное множество решений. Если главный определитель системы  $\Delta = 0$ , а хотя бы один вспомогательный определитель отличен от нуля, то система несовместна.

**Пример 5.2.** Решить методом Крамера систему уравнений:

$$\begin{cases} 5x_1 + 3x_2 = 12, \\ 2x_1 - x_2 = 7. \end{cases}$$

**Решение.** Главный определитель этой системы

$$\Delta = \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -11 \neq 0,$$

значит, система имеет единственное решение. Вычислим вспомогательные определители  $\Delta_1$  и  $\Delta_2$ , получающиеся из определителя  $\Delta$  путем замены в нем столбца, состоящего из коэффициентов при  $x_i$ , столбцом из свободных членов:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 12 & 3 \\ 7 & -1 \end{vmatrix} = -33 \quad \text{и} \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 5 & 12 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} = 11$$

Отсюда  $x_1 = \Delta_1 / \Delta = 3$ ,  $x_2 = \Delta_2 / \Delta = -1$ , решение системы - вектор  $C = (3, -1)$ .

#### Метод Гаусса

Сущность этого метода состоит в том, что посредством последовательных исключений неизвестных данная система превращается в ступенчатую (в частности, треугольную) систему, равносильную данной.

**Пример 5.4.** Решить систему уравнений методом Гаусса:

$$\begin{cases} x + y - 3z = 2, \\ 3x - 2y + z = -1, \\ 2x + y - 2z = 0. \end{cases}$$

**Решение.** Выпишем расширенную матрицу данной системы

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & 2 \\ 3 & -2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

и произведем следующие элементарные преобразования над ее строками:

а) из ее второй и третьей строк вычтем первую, умноженную соответственно на 3 и 2:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & 2 \\ 3 & -2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & -5 & 10 & -7 \\ 2 & 1 & 4 & -4 \end{pmatrix};$$

б) третью строку умножим на (-5) и прибавим к ней вторую:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & -5 & 10 & -7 \\ 0 & 0 & -10 & 13 \end{pmatrix}.$$

В результате всех этих преобразований данная система приводится к треугольному виду:

$$\begin{aligned} x + y - 3z &= 2, \\ -5y + 10z &= -7, \\ -10z &= 13. \end{aligned}$$

Из последнего уравнения находим  $z = -1,3$ . Подставляя это значение во второе уравнение, имеем  $y = -1,2$ . Далее из первого уравнения получим  $x = -0,7$ .

#### Ход работы:

10. Изучить краткую теорию, ответить на контрольные вопросы.
11. Выполнить указанные задания.
12. Сделать выводы о проделанной работе.

**Задание 1:** Решить методом Крамера (по вариантам):

- |  |  |   |
|--|--|---|
| 1) $\begin{cases} 2x_3 + 5x_2 + x_1 = 3, \\ 2x_1 + 9x_2 + 5x_3 = 12, \\ -x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 9. \end{cases}$   | 2) $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = -7, \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = -1, \\ 2x_1 - 4x_2 = -5. \end{cases}$        | 3) $\begin{cases} 7x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 15, \\ 5x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 15, \\ 10x_1 - 11x_2 + 5x_3 = 36. \end{cases}$ |
| 4) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 5, \\ x_1 + 3x_3 = 16, \\ 5x_2 - x_3 = 10. \end{cases}$                         | 5) $\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 = 6, \\ 2x_1 + 3x_2 - 7x_3 = 16, \\ 5x_1 + 2x_2 + x_3 = 16. \end{cases}$    | 6) $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 5, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 6, \\ x_1 + 5x_2 = -3. \end{cases}$                |
| 7) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 22, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 47, \\ x_1 + 3x_2 - x_3 = 18. \end{cases}$      | 8) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 2, \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = -5, \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = 3. \end{cases}$     | 9) $\begin{cases} 6x_1 + x_2 + 3x_3 = -1, \\ -2x_1 - 5x_2 + 2x_3 = 6, \\ 3x_1 + 2x_3 = 1. \end{cases}$            |
| 10) $\begin{cases} -3x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 5, \\ 2x_1 - 4x_2 - 3x_3 = -6, \\ x_1 + 6x_2 + x_3 = 17. \end{cases}$ | 11) $\begin{cases} 1x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 3, \\ 2x_1 + 9x_2 + 5x_3 = 12, \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 = -9. \end{cases}$ | 12) $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 = -2, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ 2x_1 - 3x_2 - 3x_3 = 10. \end{cases}$      |
| 13) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 3, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 9. \end{cases}$        | 14) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 1, \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 1, \\ 5x_1 + x_3 = -1. \end{cases}$           | 15) $\begin{cases} 2x_1 - 5x_2 - x_3 = -1, \\ 3x_1 + x_3 = -4, \\ 4x_1 + x_2 + 2x_3 = -5. \end{cases}$            |

$$16) \begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = -5, \\ x_2 - 2x_3 = 4, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = -1. \end{cases} \quad 17) \begin{cases} x_1 + 2x_2 = -1, \\ -3x_1 + x_3 = -2, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 1. \end{cases} \quad 18) \begin{cases} x_1 + 2x_3 = 1, \\ 3x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 - 5x_2 = 0. \end{cases}$$

## Практическая работа № 10

**Тема:** Вычисление с помощью метода Гаусса

**ЦЕЛЬ РАБОТЫ:** изучить и программно реализовать на языке высокого уровня метод Гаусса с выбором главного элемента по столбцу, исследовать его точность и эффективность на тестовых задачах.

### Метод Гаусса

К необходимости решения систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) приводят многие прикладные задачи физики, радиофизики, электроники, других областей науки и техники. По этой причине разработке и исследованию методов решения СЛАУ уделяется повышенное внимание.

Для решения СЛАУ используются как прямые методы, позволяющие получить в случае отсутствия ошибок округления точное решение за конечное, заранее известное количество арифметических операций, так и итерационные методы. Итерационные методы используются для решения СЛАУ большого порядка, а также для уточнения решения, полученного прямыми методами.

Из прямых методов популярным у вычислителей является метод Гаусса (исключения переменных) с выбором главного (максимального по модулю) элемента в столбце. Поиск главного элемента позволяет, с одной стороны, ограничить рост коэффициентов на каждом шаге исключения и, следовательно, уменьшить влияние ошибок округления на точность решения, с другой, обеспечить для невырожденных систем выполнение условия  $a_{kk} \neq 0$  (отсутствие аварийных остановов вследствие деления на нуль).

Пусть задана система линейных алгебраических уравнений

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2, \\ &\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n &= b_n. \end{aligned} \quad (1.1)$$

Процесс ее решения методом Гаусса делится на два этапа, называемых соответственно прямым и обратным ходом.

На первом этапе система (1.1) путем последовательного исключения переменных  $x_1, x_2, \dots, x_n$  сводится к эквивалентной системе с верхней треугольной матрицей коэффициентов:

$$\begin{aligned} x_1 + u_{12}x_2 + u_{13}x_3 + \dots + u_{1,n-1}x_{n-1} + u_{1n}x_n &= q_1, \\ x_2 + u_{23}x_3 + \dots + u_{2,n-1}x_{n-1} + u_{2n}x_n &= q_2, \\ &\dots \\ x_{n-1} + u_{n-1,n}x_n &= q_{n-1}, \\ x_n &= q_n. \end{aligned} \quad (1.2)$$

Исключение переменной  $x_k$  (к-й шаг прямого хода Гаусса) включает вычисление к-й строки треугольной матрицы:

$$u_{kj} = a_{kj}^{(k-1)} / a_{kk}^{(k-1)}; \quad j = \overline{k+1, n}, \quad (1.3)$$

к-го свободного члена:

$$q_k = b_k^{(k-1)} / a_{kk}^{(k-1)}, \quad (1.4)$$

преобразование уравнений системы (1.1) с номерами  $k+1, k+2, \dots, n$ :

$$a_{ij}^{(k)} = a_{ij}^{(k-1)} - a_{ik}^{(k-1)} u_{kj}; \quad b_i^{(k)} = b_i^{(k-1)} - a_{ik}^{(k-1)} q_k, \\ i = \overline{k+1, n}; \quad j = \overline{k+1, n}. \quad (1.5)$$

В соотношениях (1.5) переменной внутреннего цикла является  $j$ , переменной внешнего цикла –  $i$ . Полное число шагов, за которое выполняется прямой ход Гаусса, равно  $n$ , т. е. расчеты по формулам (1.3) ÷ (1.5) выполняются для  $k = \overline{1, n}$ .

На втором этапе (обратный ход Гаусса) решают систему (1.2):

$$x_n = q_n; \quad x_k = q_k - \sum_{j=k+1}^n u_{kj} x_j; \quad k = \overline{n-1, 1}, \quad (1.6)$$

последовательно определяя неизвестные  $x_n, x_{n-1}, \dots, x_1$ .

### Описание алгоритма

Алгоритм решения СЛАУ методом Гаусса с выбором главного элемента по столбцу выглядит следующим образом:

#### Алгоритм 1.1

1. Присвоить компонентам массива перестановок  $IOR(k)$  исходные значения:

$$IOR(k) = k, \quad k = \overline{1, n},$$

принять, после этого,  $k = 1$ .

2. Найти индекс  $p$ , для которого

$$|a_{mk}| \geq |a_{lk}|, \quad m = IOR(p), \quad l = IOR(i), \quad i = \overline{k, n}.$$

Это можно сделать так:

2.1. Положить  $AKK=0$ ;

2.2. Вычислить в цикле ( $i = \overline{k, n}$ ):

2.2.1.  $l = IOR(i)$ ;

2.2.2. Если  $|a[l, k]| < AKK$ , то перейти к п. 2.2.1;

2.2.3.  $M = l$ ;  $p = i$ ;  $AKK = |a[l, k]|$ .

3. Поменять местами значения  $IOR(k)$  и  $IOR(p)$ , если  $p \neq k$ :

$$IOR(p) = IOR(k); \quad IOR(k) = M$$

и выбрать ведущий элемент

$$AMAIN = a[M, k].$$

Если  $AMAIN = 0$ , то выйти из программы с информацией об ошибке ( $IER = 1$ ).

4. Исключить переменную  $x_k$  с помощью соотношений (1.3) ÷ (1.5) (прямой ход Гаусса):

$$4.1. \quad a[M, j] = a[M, j] / AMAIN; \quad j = \overline{k+1, n};$$

$$4.2. \quad b[M] = b[M] / AMAIN;$$

4.3. Вычислить в цикле по  $i$  ( $i = \overline{k+1, n}$ ):

$$4.3.1. \quad l = IOR(i);$$

$$4.3.2. \quad a[l, j] = a[l, j] - a[l, k] a[M, j]; \quad j = \overline{k+1, n};$$

$$4.3.3. \quad b[l] = b[l] - a[l, k] b[M].$$

5. Увеличить значение  $k$  на единицу и вернуться к п. 2, если  $k < n$ , иначе завершить прямой ход, вычислив

$$l = IOR[n]; \quad b[l] = b[l]/a[l, n]; \quad x[n] = b[l].$$

Если  $a[l, n] = 0$ , то выйти из программы с сообщением  $IER = 1$ .

6. Выполнить в цикле для  $k = \overline{n-1, 1}$  (обратный ход Гаусса):

$$l = IOR[k]; \quad x[k] = b[l] - \sum_{j=k+1}^n a[l, j]x[j]$$

Сделаем комментарии к описанному алгоритму. Выбор ведущего элемента  $a_{kk}$  предполагает перестановку строк системы (1.1). Программно это нетрудно сделать, переставляя соответствующие строки матрицы коэффициентов и соответствующие компоненты вектора свободных членов. Подобную операцию можно и не выполнять, если ввести вспомогательный одномерный массив перестановок  $IOR$ . Первоначально в пункте 1 алгоритма его элементам  $IOR(k)$ ,  $k = \overline{1, n}$ , присваиваются исходные значения  $IOR(k) = k$ . Обратиться к элементу  $a_{kj}$  матрицы коэффициентов с привлечением массива перестановок, значит использовать элемент  $a[l, j]$ ,  $l = IOR(k)$ , так как первоначально  $IOR(k) = k$ . Если  $IOR(k) = p$ , то обращение к элементам  $a[l, j]$ ,  $l = IOR[k]$ , приводит к использованию коэффициентов  $p$ -го уравнения системы. Следовательно, вместо перестановок строк матрицы коэффициентов достаточно поменять местами  $IOR[k]$  и  $IOR[p]$ . Такой подход реализован в приведенном алгоритме при выборе ведущего элемента.

Выбор ведущего элемента по столбцу обеспечивает выполнение условия  $a_{kk} \neq 0$ , если матрица решаемой системы не вырождена. Сообщение  $IER = 1$  в пунктах 3 и 5 алгоритма свидетельствует о вырожденности матрицы.

### Задание

1. Написать, отладить и исследовать на задачах (табл. 1.1), предложенных преподавателем, программу численного решения систем линейных алгебраических уравнений методом Гаусса с выбором главного элемента по столбцу.
2. Вычислить для каждой задачи вектор невязки (для этого до начала выполнения прямого хода Гаусса матрицу  $A$  и вектор  $b$  необходимо сохранить)

$$F = Ax^* - b$$

и оценить его норму

$$\delta = \max_{1 \leq i \leq n} |F_i|$$

### Содержание электронного отчета

1. Текст программы.
2. Задачи, результаты их решения, вычисленные значения нормы вектора невязки.

Таблица 1.1

№	Матрица коэффициентов A				Вектор b
1	6	13	-17		2
	13	29	-38		4
	-17	-38	50		-5
2	1	2	1		1
	-1	-2	2		1
	0	1	1		2

3	2.30	5.70	-0.80	-6.49
	3.50	-2.70	5.30	19.20
	1.70	2.30	-1.80	-5.09
4	2.75	1.78	1.11	15.71
	3.28	0.71	1.15	43.78
	1.15	2.70	3.58	37.11
5	8.64	1.71	5.42	10.21
	-6.39	4.25	1.84	3.41
	4.21	7.92	-3.41	12.29
6	21.54	-95.510	-	-49.930
	7	-91.065	96.12	-12.465
	10.22	12.264	1	60.812
	3		-	
	51.21		7.343	
	8		86.45	
			7	
7	2.60	-4.50	-2.00	19.07
	3.00	3.00	4.30	3.21
	-6.00	3.50	3.00	-18.25
8	2.31	31.49	1.52	40.95
	4.21	22.42	3.85	30.24
	3.49	4.85	28.72	42.81
9	2.50	-3.00	4.60	-1.05
	-3.50	2.60	1.50	-14.46
	-6.50	-3.50	7.30	-17.73
10	0.14	0.24	-0.84	1.11
	1.07	-0.83	0.56	0.48
	0.64	0.43	-0.38	-0.83
11	2.74	-1.18	3.17	2.18
	1.12	0.83	-2.16	-1.15
	0.81	1.27	0.76	3.23
12	1.80	2.50	4.60	2.20
	3.10	2.30	-1.20	3.60
	4.51	-1.80	3.60	-1.70

Продолжение табл. 1.1

№	Матрица коэффициентов А				Вектор b
13	2.0	1.0	-0.1	1.0	1.0
	0.4	0.5	4.0	-8.5	2.0
	0.3	-1.0	1.0	5.2	3.0
	1.0	0.2	2.5	-1.0	-1.0
14	2.21	3.65	1.69	6.99	-8.35
	8.30	2.62	4.10	1.90	-10.65
	3.92	8.45	7.78	2.46	12.21
	3.77	7.21	8.04	2.28	15.45
15	3.81	0.25	1.28	0.75	4.21
	2.25	1.32	4.58	0.49	6.47
	5.31	6.28	0.98	1.04	2.38
	9.39	2.45	3.35	2.28	10.48



16	7.90	5.60	5.70	-7.20	6.68
	8.50	-4.80	0.80	3.50	9.95
	4.30	4.20	-3.20	9.30	8.60
	3.20	-1.40	-8.90	3.30	1.00
17	0.158	1.1675	0.176	0.187	1.6471
	2	0.2071	8	1	1.7471
	0.196	0.2471	1.216	0.227	1.8471
	8	0.1254	8	1	1.5471
	0.236		0.256	1.267	
	8		8	1	
	1.116		0.139	0.149	
	1		7	0	
18	4.11	-1.26	-5.99	1.29	-0.75
	-1.26	2.00	4.00	0.00	1.08
	3.18	-1.97	0.49	-1.00	3.38
	1.29	3.81	-1.56	0.00	0.87
19	1	1	1	1	10
	1	2	-2	3	11
	2	0	1	0	5
	3	1	2	2	19
20	2	3	11	5	2
	1	1	5	2	1
	2	1	3	2	-3
	1	1	3	4	-3

### Практическая работа № 11

Тема: Программная иллюстрация метода

Цель:

Требуется вычислить интеграл:  $\int_0^1 \ln \frac{x}{1+x} dx$

Для приближённого вычисления интеграла чаще всего подынтегральную функцию заменяют «близкой» ей вспомогательной функцией, интеграла от которой вычисляется аналитически. За приближённое значение интеграла принимают интеграл от вспомогательной функции. В частности, если при вычислении  $\int_a^b f(x)dx$  подынтегральную функцию  $f(x)$  заменить интерполяционным многочленом второй степени, построенным по значениям функции в трёх точках  $a, (a+b)/2, b$ , то получится так называемая простая квадратурная формула Симпсона

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{6} \left( f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right) + R,$$

где  $R$  – остаточный член. Если  $f^{(IV)}(x)$  непрерывна на  $[a, b]$ , то

$$R = -\left(\frac{b-a}{2}\right)^5 \frac{f^{(IV)}(\xi)}{90}, \quad \xi \in [a, b].$$

С увеличением длины промежутка интегрирования точность простой формулы Симпсона в общем случае быстро падает.

Для повышения точности интегрирования применяют составную формулу Симпсона. Чтобы получить составную формулу Симпсона, разобьем отрезок  $[a, b]$  на чётное  $n = 2m$  число отрезков длины  $h = (b - a)/2m$ . Пусть  $x_i = a + ih$ ,  $y_i = f(x_i)$ ,  $i = 0, 1, 2, \dots, 2m$ . Применим простую формулу Симпсона к каждому из отрезков  $[x_0, x_2], [x_2, x_4], \dots, [x_{2m-2}, x_{2m}]$  длины  $2h$ . После суммирования интегралов по всем отрезкам получаем составную формулу Симпсона

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{6m} (y_0 + 2(y_2 + y_4 + \dots + y_{2m-2}) + 4(y_1 + y_3 + \dots + y_{2m-1}) + y_{2m}) + R_1.$$

Алгебраический порядок точности формулы Симпсона равен трём. Это означает, что она точна для многочленов до третьей степени включительно. Оценка погрешности формулы Симпсона по остаточному члену  $R_1$  часто оказывается малоэффективной из-за трудностей оценки четвёртой производной подынтегральной функции.

На практике применяют правило Рунге. Для этого выбирают число  $n$  кратное 2 и вычисляют приближённое значение интеграла по формуле Симпсона с шагом  $h = (b - a)/n$  (обозначим это приближённое значение  $I_n$ ). Затем вычисляют приближённое значение интеграла по формуле Симпсона с шагом  $h/2 = (b - a)/(2n)$  (обозначим его  $I_{2n}$ ).

За приближённое значение  $I$  интеграла  $\int_a^b f(x)dx$ , вычисленное по формуле Симпсона с поправкой по Рунге, принимают

$$I = I_{2n} + \frac{I_{2n} - I_n}{15}.$$

Погрешность этого результата приближённо оценивают величиной  $\Delta = |I_{2n} - I_n|/15$ .

### Метод Гаусса

Гауссом были построены квадратурные формулы наивысшего алгебраического порядка точности. В квадратурной формуле Гаусса

$$\int_{-1}^1 f(x)dx \cong \sum_{i=1}^n A_i f(x_i)$$

узлы  $x_1, x_2, \dots, x_n$  и коэффициенты  $A_1, A_2, \dots, A_n$  подобраны так, чтобы формула была точна для всех многочленов степени  $2n - 1$ . Можно показать, что если  $n$  – число узлов квадратурной формулы, то её алгебраический порядок точности не может быть выше  $2n - 1$ . Для приближённого вычисления интеграла по конечному отрезку  $[a, b]$  выполняем замену переменной  $t = (a + b)/2 + (b - a)x/2$ ; тогда квадратурная формула Гаусса принимает вид

$$\int_a^b f(t)dt \cong \frac{b-a}{2} \sum_{i=1}^n A_i f(t_i),$$

где  $t_i = (b + a)/2 + (b - a)x_i/2$ ;  $x_i$  – узлы квадратурной формулы Гаусса;  $A_i$  – гауссовы коэффициенты;  $i = 1, 2, \dots, n$ .

Можно показать, что узлы  $x_i$  квадратурных формул Гаусса являются корнями многочленов Лежандра степени  $n$ . Например, при  $n = 2$  для узлов  $x_i$  получаем  $x_1 = -1/\sqrt{3}$ ,  $x_2 = 1/\sqrt{3}$ . При этом  $A_1 = A_2 = 1$ . Таким образом, квадратурная формула Гаусса

$$\int_{-1}^1 f(x)dx \cong f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

имеет такой же алгебраический порядок точности, что и формула Симпсона, но требует вычисления подынтегральной функции только в двух точках.

Если подынтегральная функция достаточно гладкая, то квадратурная формула Гаусса обеспечивает очень высокую точность при небольшом числе узлов, так как для погрешности  $R_n$  формула Гаусса с  $n$  узлами справедлива оценка

$$|R_n| \cong \frac{b-a}{2.5\sqrt{n}} \left(\frac{b-a}{3n}\right)^{2n} \max_{[a,b]} |f^{(2n)}(x)|.$$

Концы отрезка интегрирования никогда не входят в число узлов формул Гаусса. Поэтому формулы Гаусса удобны для вычисления несобственных интегралов от неограниченных функций, если особые точки подынтегральной функции лежат на концах отрезка интегрирования. Так, формулы Гаусса позволяют вычислить интеграл  $\int_0^1 \frac{\cos x}{\sqrt{x}} dx$ , в

то время как формула Симпсона здесь неприменима. Блок-схема вычисления интеграла по формуле Гаусса с восемью узлами:  $x_1 = -x_8 = -0,96028986$ ,  $A_1 = A_8 = 0,10122854$ ;  $x_2 = -x_7 = -0,79666648$ ,  $A_2 = A_7 = 0,22238103$ ;  $x_3 = -x_6 = -0,52553242$ ;  $A_3 = A_6 = 0,31370664$ ;  $x_4 = -x_5 = -0,18343464$ ,  $A_4 = A_5 = 0,36268378$ .

### Результаты:

1) Для метода Симпсона получены результаты для чисел разбиений:

№	Число разбиений	Значение интеграла	Погрешность
1	100	-0.520721	0,000181323
2	200	-0.521986	9,03818e-005
3	400	-0.522617	4.51212e-005
4	800	-0.522933	2.25432e-005
5	1600	-0.52309	1.12673e-005
6	3200	-0.523164	5.63255e-006
7	6400	-0.523209	2.816e-006

2) Вычисление по квадратурной формуле Гаусса дало значение интеграла:  
-0.523248

### Вывод:

Из полученных результатов видно, что значения метод Гаусса является более точным и требует меньших вычислительных затрат по сравнению с методом Симпсона, однако требует заранее вычисленных Гауссовых коэффициентов для заданного числа узлов.

Тема: Решение системы методом простых итераций

Цель: Изучение метода простых итераций.

Выполнить в среде MathCad, Excel нахождение корней уравнений:

1)  $x^2 - \cos(\pi x) = 0$  - Комбинированным методом (хорд и касательных)

2)  $x^3 + 3x^2 - 2 = 0$  - Методом хорд.

Методы хорд и касательных дают приближения с разных сторон. Поэтому их часто применяют в сочетании друг с другом, и уточнение корня проходит быстрее.

Пусть дано уравнение  $f(x)=0$ , корень  $\alpha$  отделен и находится на отрезке  $[a, b]$ .

Применим комбинированный метод хорд и касательных с учетом типа графика функции.

Если  $f'(x) \cdot f''(x) < 0$ , то методом хорд получаем значение корня с избытком, а методом касательных с недостатком.

Если  $f'(x) \cdot f''(x) > 0$  то методом хорд получаем значение корня с недостатком, а методом касательных с избытком.

Рассмотрим случай, когда  $f'(x) < 0$ ,  $f''(x) > 0$ , то со стороны конца  $a$  лежат приближённые значения корня, полученные по методу касательных, а со стороны конца  $b$  - значения, полученные по методу хорд.

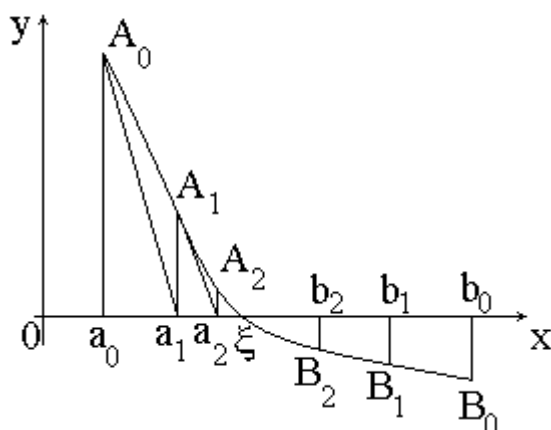


Иллюстрация комбинированного метода

Тогда

$$a_1 = a - \frac{f(a)}{f'(a)} \qquad b_1 = b - \frac{f(b)(b-a)}{f(b) - f(a)}$$

Теперь истинный корень  $\alpha$  находится на интервале  $[a_1, b_1]$ . Применяя к этому интервалу комбинированный метод, получаем:

$$a_2 = a_1 - \frac{f(a_1)}{f'(a_1)} \qquad b_2 = b_1 - \frac{f(b_1)(b_1 - a_1)}{f(b_1) - f(a_1)}$$

и вообще

$$a_{n+1} = a_n - \frac{f(a_n)}{f'(a_n)} \qquad b_{n+1} = b_n - \frac{f(b_n)(b_n - a_n)}{f(b_n) - f(a_n)}$$

Для случая, когда  $f'(x) \cdot f''(x) > 0$ , то рассуждая аналогично, получим следующие формулы для уточнения корня уравнения:

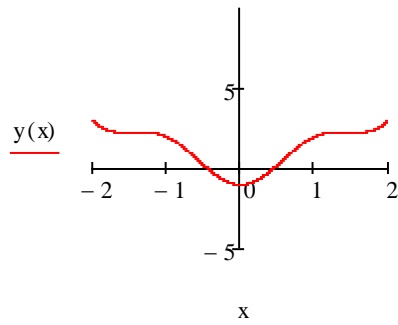
$$b_{n+1} = b_n - \frac{f(b_n)}{f'(b_n)} \qquad a_{n+1} = a_n - \frac{f(a_n)(b_n - a_n)}{f(b_n) - f(a_n)}$$

Ручной счет в MathCAD.

Имеем уравнение:  $x^2 - \cos(\pi x) = 0$

1) Отделяем корни графически.

$$y(x) := x^2 - \cos(\pi \cdot x)$$



Мы построили график функции  $y=f(x)$  для уравнения вида  $f(x)=0$ . Значения действительных корней уравнения являются абсциссами пересечения графика функции с осью ОХ. Очевидно, что уравнение имеет корень, который принадлежит отрезку:

$[0;1]$ . Будем уточнять этот корень.

2) Сузим отрезок методом половинного деления:

(корень будем обозначать буквой  $c$ ):

$$y(x) = x^2 - \cos(\pi x)$$

$$\left. \begin{array}{l} y(0) = -1 \\ y(1) = 2 \end{array} \right\} \Rightarrow y(0)y(1) < 0 \Rightarrow c \in [0;1]$$

$$y(0,5) = 0,25 \Rightarrow c \in [0;1]$$

$$y(0,25) = -0,645 \Rightarrow c \in [0,25;0,5]$$

$$y(0,375) = -0,242 \Rightarrow c \in [0,375;0,5]$$

Длина отрезка локализации корня 0.125

3) Проверим условия теоремы:

$$D(y) : x \in R.$$

$$y(0,375) \cdot y(0,5) < 0.$$

$$y'(x) = 2x + \pi \sin(\pi x)$$

$$y''(x) = \pi^2 \cos(\pi x) + 2$$

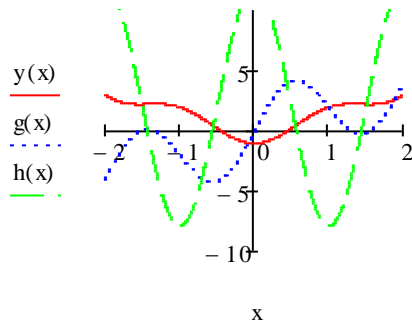
$$g(x) = y';$$

$$h(x) = y''$$

$$y(x) := x^2 - \cos(\pi \cdot x)$$

$$g(x) := \frac{d}{dx} y(x) \rightarrow 2 \cdot x + \pi \cdot \sin(\pi \cdot x)$$

$$h(x) := \frac{d^2}{dx^2} y(x) \rightarrow \pi^2 \cdot \cos(\pi \cdot x) + 2$$



Следовательно,  $y'(x) > 0$  при  $\forall x \in [0,375;0,5]$ ,  $y''(x) > 0$  при  $\forall x \in [0,375;0,5]$ .

4) Уточнение корня комбинированным методом:

$$x0 := 0.37;$$

$$x01 := 0.4$$

$$x1 := x0 - \frac{y(x0) \cdot (x0 - x01)}{y(x0) - y(x01)} = 0.436$$

$$x11 := x01 - \frac{y(x01)}{g(x01)} = 0.44$$

$$|x1 - x11| \rightarrow 0.003145465800380$$

$$x2 := x1 - \frac{y(x1) \cdot (x1 - x01)}{y(x1) - y(x01)} = 0.438$$

$$x21 := x11 - \frac{y(x11)}{g(x11)} = 0.438$$

$$|x2 - x21| \rightarrow 0.00004909260250$$

$$|x2 - x21| < 0.0001$$

Следовательно корнем уравнения будет  $x = 0,438 \pm 0.0001$

Расчет в Excel.

№	x	x'	f(x)	f(x')	f'(x')	e
0	0,375	0,5	-0,24206	0,25	4,141593	0,003145
1	0,436491	0,439637	-0,00767	0,004778	3,964546	1,86E-06
2	0,43843	0,438431	-4,6E-06	2,81E-06	3,959871	6,51E-13
3	0,438431	0,438431	-1,6E-12	9,83E-13	3,959868	0

Формула в ячейке B3: =B2-((D2\*(B2-C2))/(D2-E2))

Формула в ячейке C3:= C2-(E2/F2)

Формула в ячейке D2: =B2^2-COS(3,141592654\*B2)

Формула в ячейке E2: =C2^2-COS(3,141592654\*C2)

Формула в ячейке F2: =2\*C2+3,141592654\*SIN(3,141592654\*C2)

Формула в ячейке G2:=ABS(C3-B3)

Таким образом, получаем решение:  $x = 0,438 \pm 0.0001$ .

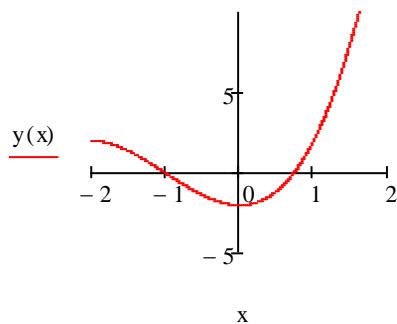
Метод хорд.

Ручной счет в MathCAD.

Имеем уравнение:

$$X^3+3x^2-2=0$$

1) Отделяем корни аналитически:



Будем уточнять корень на отрезке [0;1]

Функция  $y = x^3 + 3x^2 - 2$  на отрезке [0;1]:

1) непрерывна

2)  $y(0)*y(1)=-2*2<0$

2) Сузим отрезок методом половинного деления:



$$y(x) = x^3 + 3x^2 - 2$$

$$\left. \begin{array}{l} y(0) = -2 \\ y(1) = 2 \end{array} \right\} \Rightarrow y(0)y(1) < 0 \Rightarrow c \in [0;1]$$

$$y(0,5) = -1,125 \Rightarrow c \in [0,5;1]$$

$$y(0,75) = 0,109375 \Rightarrow c \in [0,5;0,75]$$

$$y(0,625) = -0,583984375 \Rightarrow c \in [0,625;0,75]$$

Длина отрезка локализации корня 0,125

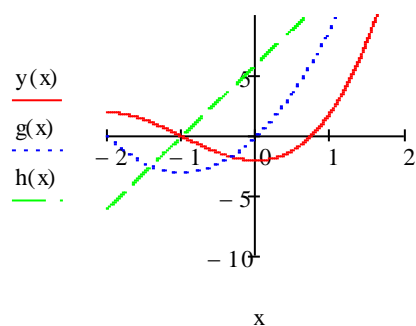
3) Условия теоремы:

Построим график функции, график первой производной, график второй производной на отрезке  $[0,625;0,75]$ :

$$y(x) := x^3 + 3x^2 - 2$$

$$g(x) := \frac{d}{dx}y(x) \rightarrow 3x^2 + 6x$$

$$h(x) := \frac{d^2}{dx^2}y(x) \rightarrow 6x + 6$$



Область определения функции  $y(x)$  – все действительные числа, это видно из первого графика.

$$y(0,625) \cdot y(0,75) < 0$$

$$y'(x) = 3x^2 + 6x$$

$$y''(x) = 6x + 6$$

Отсюда видно, что первая производная на отрезке  $[0,625;0,75]$  больше нуля и вторая производная на отрезке  $[0,625;0,75]$  больше нуля. Так как  $y(b)>0$  и  $y''(b)>0$ , то точка  $b$  является неподвижной.

3) Уточнение корня методом хорд:

$$a := 0.62; \quad b := 0.7;$$

$$c_1 := a - \frac{y(a) \cdot (a - b)}{y(a) - y(b)} = 0.73 \quad |a - c_1| \rightarrow 0.10528169014084$$

$$c_2 := c_1 - \frac{y(c_1) \cdot (c_1 - b)}{y(c_1) - y(b)} = 0.732 \quad |c_1 - c_2| \rightarrow 0.001741914338228$$

$$c_3 := c_2 - \frac{y(c_2) \cdot (c_2 - b)}{y(c_2) - y(b)} = 0.732 \quad |c_2 - c_3| \rightarrow 0.000026785281246$$

Следовательно корень уравнения

$$x = 0,73205 \pm 0.0001$$

Расчет в Excel

№	a	b	f(a)	f(b)	c	e
0	0,625	0,75	-0,58398	0,109375	0,730282	0,107024
1	0,730282	0,75	-0,0106	0,109375	0,732024	0,001769
2	0,732024	0,75	-0,00016	0,109375	0,73205	2,72E-05
3	0,73205	0,75	-2,5E-06	0,109375	0,732051	

Формула в ячейке D2:  $=B2^3+3*B2^2-2$

Формула в ячейке E2:  $=C2^3+3*C2^2-2$

Формула в ячейке F2:  $= B2-((D2*(B2-C2))/(D2-E2))$

Формула в ячейке G2:  $= ABS(B2-F3)$

Таким образом, получаем решение:  $x = 0,73205 \pm 0.0001$

Проделав данную лабораторную работу, я изучила два метода решения приближенных и алгебраических уравнений: метод хорд и комбинированный метод. Научилась отделять корни как аналитически, так и графически. Метод хорд удобнее применять, если график функции на отрезке проходит под небольшим углом отклонения от оси ОУ, так как точки пересечения касательных с осью ОХ будут быстрее сходиться к итоговому результату. Комбинированный метод удобнее применять всегда, так как промежуточные результаты сходятся к итоговому сразу с двух сторон. Кроме того, при

комбинированном методе гораздо удобнее рассчитывать погрешность. Также, я научилась выделять отрезки, которым принадлежат корни уравнения графически и аналитически, сужать эти отрезки методом половинного деления. При выделении отрезков гораздо удобнее использовать графический способ, так как из него сразу видно сколько корней, и каким отрезкам они принадлежат, а при аналитическом способе нужно производить определенные вычисления.

## Практическая работа № 13

Тема: Интерполирование функции

1) Построить интерполяционный многочлен Ньютона. Начертить график и отметить на нем узлы интерполяции. Вычислить значения в точке  $x=1.25$ .

$x_i$	1	1.5	2	2.5	3	3.5
$y_i$	0.5	2.2	2	1.8	0.5	2.25

2) Построить интерполяционный многочлен Лагранжа. Начертить график и отметить на нем узлы интерполяции. Вычислить значение в точке  $x=1.2$ .

$x_i$	0	0.25	1.25	2.125	3.25
$y_i$	5.0	4.6	5.7	5.017	4.333

3) Выполнить интерполяцию сплайнами третьей степени. Построить график и отметить на нем узлы интерполяции.

$x_i$	7	9	13
$y_i$	2	-2	3

### Постановка задачи интерполяции.

Пусть известные значения функции образуют следующую таблицу:

$x_0$	$x_1$	$x_2$	...	$x_{n-1}$	$x_n$
$y_0$	$y_1$	$y_2$	...	$y_{n-1}$	$y_n$

При этом требуется получить значение функции  $f$  в точке  $x$ , принадлежащей отрезку  $[x_0, x_n]$  но не совпадающей ни с одним значением  $x_i$ . Часто при этом не известно аналитическое выражение функции  $f(x)$ , или оно не пригодно для вычислений.

В этих случаях используется прием построения приближающей функции  $F(x)$ , которая очень близка к  $f(x)$  и совпадает с ней в точках  $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$ . При этом нахождение приближенной функции называется интерполяцией, а точки  $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$  - узлами интерполяции. Обычно интерполирующую ищут в виде полинома  $n$  степени:

$$P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_{n-1}x + a_n$$

Для каждого набора точек имеется только один интерполяционный многочлен, степени не больше  $n$ . Однозначно определенный многочлен может быть представлен в различных видах. Рассмотрим интерполяционный многочлен Ньютона и Лагранжа.

### **Интерполяционная формула Лагранжа.**

Формула Лагранжа является наиболее общей, может применяться к таким узлам интерполяции, что расстояние между соседними узлами не постоянная величина.

Построим интерполяционный полином  $L_n(x)$  степени не больше  $n$ , и для которого выполняются условия  $L_n(x_i) = y_i$ . Запишем его в виде суммы:

$$L_n(x) = l_0(x) + l_1(x) + l_2(x) + \dots + l_n(x), \quad (1)$$

где  $l_k(x_i) = y_i$ , если  $i=k$ , и  $l_k(x_i) = 0$ , если  $i \neq k$ ;

Тогда многочлен  $l_k(x)$  имеет следующий вид:

$$l_k(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})(x-x_n)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)\dots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})(x_i-x_n)} \quad (2)$$

Подставим (2) в (1) и перепишем  $L_n(x)$  в виде:

$$L_n(x) = \sum_{j=0}^n y_j \left( \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^n \frac{x-x_i}{x_j-x_i} \right)$$

Если функция  $f(x)$ , подлежащая интерполяции, дифференцируема больше чем  $n+1$  раз, то погрешность интерполяции оценивается следующим образом:

$$|f(x) - L_n(x)| = \frac{f^{(n+1)}(x_0 + \theta(x_n - x_0))}{(n+1)!} \prod_{i=0}^n (x-x_i) \quad \text{где } 0 < \theta < 1 \quad (3)$$

### Интерполяционная формула Ньютона.

Построение интерполяционного многочлена в форме Ньютона применяется главным образом когда разность  $x_{i+1} - x_i = h$  постоянна для всех значений  $x = 0..n-1$ .

Конечная разность  $k$ -го порядка:

$$\Delta y_i = y_{i+1} - y_i$$

$$\Delta^2 y_i = \Delta y_{i+1} - \Delta y_i = y_{i+2} - 2y_{i+1} + y_i$$

.....

$$\Delta^k y_i = y_{i+k} - k y_{i+k-1} + \frac{k(k-1)}{2!} y_{i+k-2} + \dots + (-1)^k y_i$$

Будем искать интерполяционный многочлен в виде:

$$P_n(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)(x-x_1) + \dots + a_n(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{n-1})$$

Найдем значения коэффициентов  $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ :

Полагая  $x=x_0$ , находим  $a_0 = P(x_0) = y_0$ ;

Далее подставляя значения  $x_1, x_2, \dots, x_n$  получаем:

$$a_1 = \Delta y_0 / h$$

$$a_2 = \Delta^2 y_0 / 2! h^2$$

$$a_3 = \Delta^3 y_0 / 3! h^3$$

.....

$$a_n = \Delta^n y_0 / n! h^n$$

Таким образом:

$$P_n(x) = y_0 + \Delta y_0 / h * (x-x_0) + \Delta^2 y_0 / 2! h^2 * (x-x_0)(x-x_1) + \dots + \Delta^n y_0 / n! h^n * (x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{n-1}) \quad (1)$$

Практически формула (1) применяется в несколько ином виде:

Возьмем:  $t = (x-x_0)/h$ , тогда  $x = x_0 + th$  и формула (1) переписывается как:

$$P_n(x) = y_0 + t \Delta y_0 + \frac{t(t-1)}{2!} \Delta^2 y_0 + \dots + \frac{t(t-1)\dots(t-n+1)}{n!} \Delta^n y_0 \quad (2)$$

Формула (2) называется интерполяционной формулой Ньютона.

Погрешность метода Ньютона оценивается следующим образом:

$$R_n = \frac{\Delta^{(n+1)} y_0}{(n+1)!} \prod_{i=0}^n (t-i) \quad (3)$$

### Интерполяция сплайнами.

При большом количестве узлов интерполяции сильно возрастает степень интерполяционных многочленов, что делает их неудобными для проведения вычислений.

Высокой степени многочленов можно избежать, разбив отрезок интерполирования на несколько частей, с построением в каждой части своего интерполяционного полинома.

Такой метод называется интерполяцией сплайнами. Наиболее распространенным является

построение на каждом отрезке  $[x_i, x_{i+1}]$ ,  $i=0..n-1$  кубической функции. При этом сплайн – кусочная функция, на каждом отрезке заданная кубической функцией, является кусочно-непрерывной, вместе со своими первой и второй производной.

Будем искать кубический сплайн на каждом из частичных отрезков  $[x_i, x_{i+1}]$  в виде:

$$S_i(x) = a_i + b_i(x - x_i) + c_i(x - x_i)^2 + d_i(x - x_i)^3, \text{ где } a_i, b_i, c_i, d_i - \text{неизвестные.}$$

Из того что  $S_i(x_i) = y_i$  получим:

$$S_i(x) = y_i + b_i(x - x_i) + c_i(x - x_i)^2 + d_i(x - x_i)^3$$

В силу непрерывности потребуем совпадения значений в узлах, т.е.:

$$S_i(x_{i+1}) = S_{i+1}(x_i), i=0..n-1; \quad (1)$$

Также потребуем совпадения значений первой и второй производной:

$$S'_i(x_{i+1}) = S'_{i+1}(x_i), i=0..n-2; \quad (2)$$

$$S''_i(x_{i+1}) = S''_{i+1}(x_i), i=0..n-2; \quad (3)$$

Из (1) получим  $n$  линейных уравнений с  $3n$  неизвестными

$$y_{i+1} = y_i + b_i(x - x_i) + c_i(x - x_i)^2 + d_i(x - x_i)^3, i=0..n-1; \quad (1^*)$$

Из (2) и (3) получим  $2(n-1)$  линейных уравнений с теми же неизвестными:

$$b_{i+1} = b_i + 2c_i(x - x_i) + 3d_i(x - x_i)^2, i=0..n-1; \quad (2^*)$$

$$c_{i+1} = c_i + 3d_i(x - x_i), i=1..n-1; \quad (3^*)$$

Недостающие два уравнения определим следующим образом. Предположим, что в точках  $x_0$  и  $x_n$  производная равна нулю и получим еще два уравнения. Получим систему из  $3*n$  линейных уравнений с  $3*n$  неизвестными. Решим ее любым из методов и построим интерполяционную функцию, такую что на отрезке  $[x_i, x_{i+1}]$  она равна  $S_i$ .

### Метод Лагранжа

```
procedure TForm1.Button1Click(Sender: TObject);
```

```
type tip=array of real;
```

```
var x,y:tip;
```

```
    i,j,n:byte;
```

```
    p,s,xx:real;
```

```
begin
```

```
    n:=edt.Count;
```

```
    setlength(x,n);
```

```
    setlength(y,n);
```

```
    for i:=0 to n-1 do x[i]:=edt.massiv[i];edt.Lines.Delete(0);
```

```
    for i:=0 to n-1 do y[i]:=edt.massiv[i];edt.Lines.Delete(0);
```

```
    xx:=strtofloat(edt.Text);
```

```
    edt.Lines.Delete(0);
```

```
    s:=0;
```

```
    for i:=0 to n-1 do
```

```
        begin
```

```
            p:=1;
```

```
            for j:=0 to n-1 do if i<>j then p:=p*(xx-x[j])/(x[i]-x[j]);
```

```
            p:=p*y[i];
```

```
            s:=s+p;
```

```
        end;
```

```
    edt.writer(",1);
```

```
    edt.writer(",s,1);
```

```
end;
```

**Сплайн – интерполяция** (программа составляет систему линейных уравнений, решая которую находим коэффициенты кубических сплайнов).

```

procedure TForm1.Button1Click(Sender: TObject);
var b,c,d,x,y:array of real;
    urm:array of array of real;
    i,j,k,n :byte;
begin
n:=edt.Count;
setlength(x,n);setlength(y,n);
for i:=0 to n-1 do x[i]:=edt.massiv[i];edt.Lines.Delete(0);
for i:=0 to n-1 do y[i]:=edt.massiv[i];edt.Lines.Delete(0);
setlength(b,n-1);setlength(c,n-1);setlength(d,n-1);
setlength(urm,3*(n-1),3*(n-1)+1);
for i:=0 to 3*(n-1)-1 do
    for j:=0 to 3*(n-1) do urm[i,j]:=0;
for i:=0 to n-1 do edt.writer(' ',y[i],0);
for i:=0 to n-2 do
    begin
        urm[i,3*i+0]:=x[i+1]-x[i];
        urm[i,3*i+1]:=(x[i+1]-x[i])*(x[i+1]-x[i]);
        urm[i,3*i+2]:=(x[i+1]-x[i])*(x[i+1]-x[i])*(x[i+1]-x[i]);
        urm[i,3*(n-1)]:=y[i+1]-y[i];
    end;
for i:=0 to n-3 do
    begin
        urm[i+n-1,3*i+0]:=1;
        urm[i+n-1,3*i+1]:=2*(x[i+1]-x[i]);
        urm[i+n-1,3*i+2]:=3*(x[i+1]-x[i])*(x[i+1]-x[i]);
        urm[i+n-1,3*i+3]:=-1;
    end;
for i:=0 to n-3 do
    begin
        urm[i+2*n-3,3*i+1]:=1;
        urm[i+2*n-3,3*i+2]:=3*(x[i+1]-x[i]);
        urm[i+2*n-3,3*i+4]:=-1;
    end;
urm[3*n-5,0]:=1;    urm[3*n-5,3*(n-1)]:=0;
urm[3*n-4,3*(n-1)-3]:=1;urm[i+2*n-3,3*(n-1)-2]:=2*(y[n-1]-y[n-2])
urm[3*n-4,3*(n-1)-1]:=3*(y[n-1]-y[n-2]) *(y[n-1]-y[n-2]);
urm[i+2*n-3,3*(n-1)]:=0
for i:=0 to 3*(n-1)-1 do
    begin
        edt.writer(",");
        for j:=0 to 3*(n-1) do edt.writer(' ',urm[i,j],0);
    end;
end;
end;

```

Выполнить интерполяцию сплайнами третьей степени. Построить график и отметить на нем узлы интерполяции.

$x_i$	7	9	13
$y_i$	2	-2	3

### **Решение.**

Будем искать кубический сплайн на каждом из частичных отрезков  $[x_i, x_{i+1}]$ ,  $i=0..2$  в виде:

$$S_i(x) = a_i + b_i(x - x_i) + c_i(x - x_i)^2 + d_i(x - x_i)^3, \text{ где } a_i, b_i, c_i, d_i - \text{неизвестные.}$$

Из того что  $S_i(x_i) = y_i$  получим:

$$S_i(x) = y_i + b_i(x - x_i) + c_i(x - x_i)^2 + d_i(x - x_i)^3$$

В соответствии с теоретическими положениями изложенными выше, составим систему линейных уравнений, матрица которой будет иметь вид:

$$M := \begin{bmatrix} 2 & 4 & 8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 16 & 64 \\ 1 & 4 & 12 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 6 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 8 & 48 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4 \\ 5 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

При этом мы потребовали равенства производной нулю.

Решая систему уравнений получим вектор решений  $[b_1, c_1, d_1, b_2, c_2, d_2]$ :

$$\begin{bmatrix} 0 & -\frac{37}{16} & \frac{21}{32} & -\frac{11}{8} & \frac{13}{8} & -\frac{31}{128} \end{bmatrix}$$

Подставляя в уравнение значения  $b_1, c_1, d_1$ , получим на отрезке  $[7..9]$ :

$$S_0 = 2 - \frac{37(x-7)^2}{16} + \frac{21(x-7)^3}{32}$$

Если выражение упростить то:

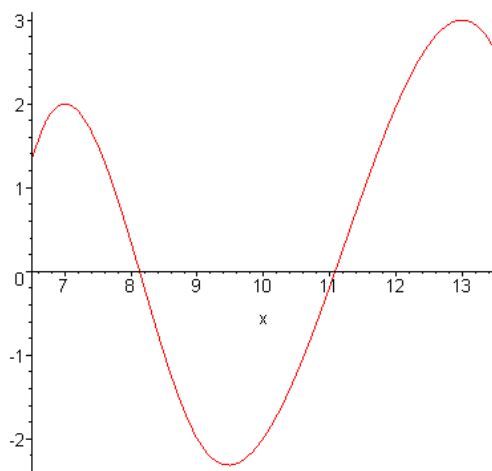
$$S_0 := -\frac{10765}{32} - \frac{515}{32}x^2 + \frac{4123}{32}x + \frac{21}{32}x^3$$

Аналогично подставляя в уравнение значения  $b_2, c_2, d_2$ , получим на отрезке  $[9..13]$ :

$$S_1 = \frac{83}{8} - \frac{11x}{8} + \frac{13(x-9)^2}{8} - \frac{31(x-9)^3}{128}$$

$$\text{или } S_1 := \frac{40775}{128} - \frac{11453}{128}x + \frac{1045}{128}x^2 - \frac{31}{128}x^3$$

График имеет вид:



### **Метод Ньютона**

```
procedure TForm1.Button1Click(Sender: TObject);
type tip=array of real;
var x,y:tip;
    i,j,n:byte;
    p,s,xx,t,h:real;
    kp:array of array of real;
begin
n:=edt.Count;
setlength(x,n);
setlength(y,n);
for i:=0 to n-1 do x[i]:=edt.massiv[i];edt.Lines.Delete(0);
for i:=0 to n-1 do y[i]:=edt.massiv[i];edt.Lines.Delete(0);
xx:=strtofloat(edt.Text);
edt.Lines.Delete(0);
setlength(kp,n,n);
for i:=0 to n-1 do for j:=0 to n-1 do kp[i,j]:=0;
for i:=0 to n-1 do kp[0,i]:=y[i];
for i:= 1 to n-1 do
    for j:=0 to n-i-1 do
        kp[i,j]:=kp[i-1,j+1]-kp[i-1,j];
for i:= 0 to n-1 do
    begin
        for j:=0 to n-1 do edt.writer(' ',kp[i,j],0);
        edt.writer(",1");
    end;
edt.writer(",1");
h:=0.5;
t:=(xx-x[0])/h;
s:=y[0];
for i:=1 to n-1 do
    begin
        p:=1;
        for j:=0 to i-1 do p:=p*(t-j)/(j+1);
        s:=s+p*kp[i,0];
    end;
edt.writer(",s,1");
end;
```



Построить интерполяционный многочлен Ньютона. Начертить график и отметить на нем узлы интерполяции. Вычислить значение функции в точке  $x=1.25$ .

$x_i$	1	1.5	2	2.5	3	3.5
$y_i$	0.5	2.2	2	1.8	0.5	2.25

**Решение.**

Построим таблицу конечных разностей в виде матрицы:

$$\begin{bmatrix} 0.5 & 2.2 & 2 & 1.8 & 0.5 & 2.25 \\ 1.7 & -0.2 & -0.2 & -1.3 & 1.75 & p \\ -1.9 & 0 & -1.1 & 3.05 & p & p \\ 1.9 & -1.1 & 4.15 & p & p & p \\ -3 & 5.25 & p & p & p & p \\ 8.25 & p & p & p & p & p \end{bmatrix}$$

Воспользуемся интерполяционной формулой Ньютона:

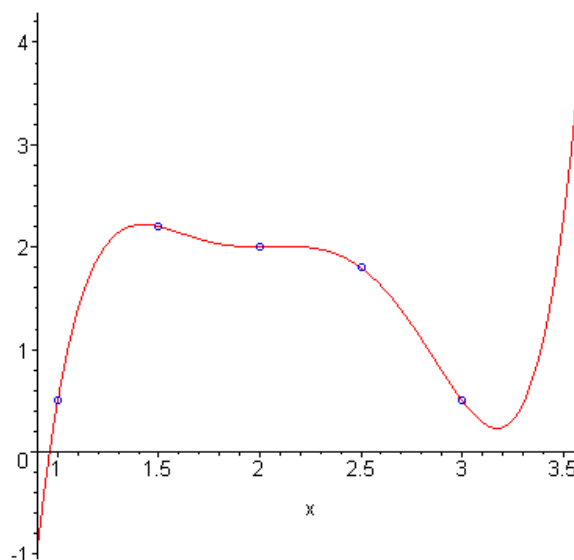
$$P_n(x) = y_0 + t \Delta y_0 + \frac{t(t-1)}{2!} \Delta^2 y_0 + \dots + \frac{t(t-1)\dots(t-n+1)}{n!} \Delta^n y_0$$

Подставив значения получим многочлен пятой степени, упростив который получим:

$$P_5(x) = 2.2x^5 - 24x^4 + 101.783x^3 - 20.2x^2 + 211.417x - 80.7$$

Вычислим значение функции в точке  $x=1.25$ ;  $P(1.25)=2.0488$ ;

График функции имеет вид:



Построить интерполяционный многочлен Лагранжа. Начертить график и отметить на нем узлы интерполяции. Вычислить значение в точке  $x=1.2$ .

$x_i$	0	0.25	1.25	2.125	3.25
$y_i$	5.0	4.6	5.7	5.017	4.333

### Решение.

Построим интерполяционный многочлен Лагранжа  $L_4(x)$ , подставив значения из таблицы в формулу:

$$L_n(x) = \sum_{j=0}^n y_j \left( \prod_{i=0, i \neq j}^n \frac{x - x_i}{x_j - x_i} \right)$$

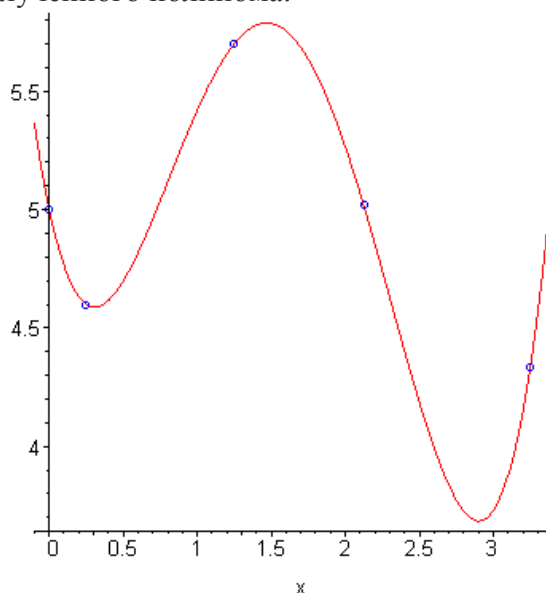
Напишем программу и вычислим значение многочлена в точке  $x=1.2$ :

$$L_4(1.2)=5.657;$$

Полученный многочлен имеет четвертую степень. Упростим его и получим:

$$L_4(x) := 0.5697x^4 - 3.5536x^3 - 2.9835x + 6.3867x^2 + 5$$

Построим график полученного полинома:



## Практическая работа № 14

Тема: Расчет с помощью полинома Ньютона

Постановка задачи. Функция  $y = f(x)$  определена на отрезке  $[a; b]$ , задана своими значениями  $y_i$  в равноотстоящих узлах  $x_i \in [a; b]$ , т.е.  $y_i = f(x_i)$ . Определить значение функции  $y_\xi = y(\xi)$  в точке  $\xi \in [a; b]$ .

**1. Полином Ньютона.** Если функция  $y = f(x)$  определена на отрезке  $[a; b]$  и задана своими значениями  $y_i$  в равноотстоящих узлах  $x_i \in [a; b]$ ,  $x_{i+1} = x_i + h$ ,  $h = \text{const} > 0$ , то задача интерполяции решается в двух случаях.

- Когда точка  $\xi \in [a; b]$  находится в начале таблицы значений  $x_i \in [a; b]$  используется первая интерполяционная формула Ньютона

$$P_n(\xi) = y_0 + q\Delta y_0 + \frac{q(q-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \frac{q(q-1)(q-2)}{3!}\Delta^3 y_0 + \dots + \frac{q(q-1)\dots(q-n+1)}{n!}\Delta^n y_0,$$

$$q = \frac{\xi - x_0}{h}, \Delta y_i = y_{i+1} - y_i, \Delta^{k+1} y_i = \Delta^k y_{i+1} - \Delta^k y_i, \Delta^0 y_i = y_i.$$

Тогда  $y_\xi = f(\xi) \approx P_n(\xi), \Delta_{y(\xi)} = \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} \left| f^{(n+1)}(\bar{\xi}) \right| \cdot \prod_{k=0}^n (q-k), \bar{\xi} \in [a; b].$

**б)** Когда точка  $\xi \in [a; b]$  находится в конце таблицы значений  $x_i \in [a; b]$  используется вторая интерполяционная формула Ньютона

$$P_n(\xi) = y_n + q\Delta y_n + \frac{q(q+1)}{2!}\Delta^2 y_{n-1} + \frac{q(q+1)(q+2)}{3!}\Delta^3 y_{n-2} + \dots + \frac{q(q+1)\dots(q+n-1)}{n!}\Delta^n y_0,$$

$$q = \frac{x_n - \xi}{h}.$$

Тогда  $y_\xi = f(\xi) \approx P_n(\xi), \Delta_{y(\xi)} = \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} \left| f^{(n+1)}(\bar{\xi}) \right| \cdot \prod_{k=0}^n (q+k), \bar{\xi} \in [a; b].$

**2. Интерполяционная формула Лагранжа.** Если функция  $y = f(x)$  определена на отрезке  $[a; b]$  и дана своими значениями  $y_i$  в не равноотстоящих узлах  $x_i \in [a; b], x_{i+1} \neq x_i + h, h = \text{const} > 0$ , то задача интерполяции решается с помощью полинома Лагранжа

$$L_n(\xi) = \sum_{i=0}^n y_i \prod_{k \neq i, 0}^n \left( \frac{\xi - x_k}{x_i - x_k} \right), y_\xi = f(\xi) \approx L_n(\xi), \Delta_{y(\xi)} = \frac{\prod_{k=0}^n (\xi - x_k)}{(n+1)!} \left| f^{(n+1)}(\bar{\xi}) \right|, \bar{\xi} \in [a; b].$$

Задание: 1) Отделить корни уравнения графически и программно.

2) Уточнить корни уравнения методом касательных с точностью  $\varepsilon = 0,0001$ .

3) Нарисовать схему применения метода к каждому корню уравнения.

Вариант	Уравнение
1	$1,5e^x - 3 = \lg(x)$
2	$x^3 - 4x^2 = \sin(0.9x + 0.1)$
3	$x^3 - 2x^2 + 1 = 0$
4	$2x^3 - 5x^2 + 2x + 1 = 0$

Вариант	Уравнение
31	$\text{tg}(0,2x + 0,5) + 0.51 = x^3$
32	$x^3 - 4x^2 + 2 x  - 1 = 0$
33	$(x-3)^2 - 2\lg(x^2 - 3) = 1$
34	$x^2 - 2\sin(x-1) - 2 = 0$

5	$x^3 - \cos(2x-1) = 0$
6	$3x^2 - 2e^{\cos(x-0.2)} = 0$
7	$x^3 + 2x^2 - e^{2x-1} = 0$
8	$x^3 + 2x^2 - \sin(3x+1) = 0$
9	$\ln(x) - \frac{1}{5x+2} = 0$
10	$e^{x^2} + 2x - 7 = 0$
11	$x^3 - x - 0.2 = 0$
12	$x^3 - 4x^2 + x + 2.5 = 0$
13	$x^3 - 3x^2 + x + 3 = 0$
14	$x^3 + 0.1 - \lg(x) = 0$
15	$x^3 - 2x^2 - 3x + 1 = 0$
16	$(x-1)^3 \cos(x) + 1 = 14x^2$
17	$x^2 - 2 \cdot \ln(x) = 2.5$
18	$\cos(2x-1) = x^3 - 2x - 1$
19	$x^3 - 5x^2 + 2x + 1 = 0$
20	$3 x  - 3 \cdot \ln(x+2) - 4 = 0$

35	$x^3 - 1.2x + 1 = 0$
36	$x^2 - 2\sin(2x) - 0.5 = 0$
37	$x^2 + \lg(x) = 1.25$
38	$\operatorname{ctg}(0.5x - 0.2) = x^2 - 5$
39	$x^3 - 5x^2 + 5x - 1 = 0$
40	$2x - \exp(x^2 - 2) = -1$
41	$\lg(x-2) + \frac{3}{2x+7} = 0$
42	$x^4 + 2x^2 - e^{2x-1} = 0$
43	$e^{x^2} - 5\sin(x) = 0$
44	$4 \cdot \ln(x) - \frac{x^2}{3} + 1 = 0$
45	$2x^2 - 2^x - 3\sin(x) = 0$
46	$2^x - 3x^2 + 2 = 0$
47	$\cos(x-1) - \frac{x^2}{3} = 0$
48	$5x^2 + 2x - \frac{x}{e^x + 1} = 0$
49	$5x^2 - 2 \cdot \lg( x  + 0.5) = 2$
50	$x^3 - 3x^2 + 4 \cdot \sin(x) = -1$

21	$3 \cdot \lg(x+2) - \frac{4x}{2x^2+3} = 1$
22	$2 \cdot \ln(x+1) - \frac{x^2}{2} + 1 = 0$
23	$2x^4 - 0,5^x - 1 = 0$
24	$2^x + x^2 - 2 = 0$
25	$3\cos(x^{0,5} - 0,3) = \frac{3}{2x}$
26	$x^3 - 2\cos(3x+1) + 2 = 0$
27	$x^2 + 5\sin(3x+1) = 0$
28	$(x-1)^{3/2} - (x-1)^2 = 0.03$
29	$3x^2 + \cos(x - \pi/5) - 1 = 0$
30	$(x-1)^3 + 2\ln x-2  = 0,2$

51	$x^3 - 5x^2 + 3x + 1 = 0$
52	$2e^x - 5x^2 - 1,1 = 0$
53	$2\sin(x-1) = x - 1,2$
54	$\cos(3x - 0,25) = \frac{x^2}{2} - 1$
55	$x^4 - 2x^2 + 0,07 = 0$
56	$0,5x + \sin(x) = 1,5$
57	$5\cos(x) = 3 - x^2$
58	$2\cos(2x + 0,5) = \exp(x^2)$
59	$x^4 - 8x^2 + 2 = 0$
60	$x^2 - 3\sin(x^2 - 1) = 0$

### Практическая работа № 15

Тема: Аппроксимация функции одной переменной

**Постановка задачи.** Дана функция  $y = f(x)$  своими значениями  $y_i = f(x_i)$ , где

$x_i \in [a, b]$ ,  $x_i = x_0 + i \cdot h$ ,  $h = \text{const} = \frac{b-a}{n}$ ,  $x_0 = a$ ,  $i = \overline{0, n}$ . Найти интерполирующую

функцию определенного класса  $F(x)$ , такую что  $F(x_i) = y_i$ , для  $\forall x_i \in [a, b]$ ,  $i = \overline{0, n}$ .

Задача интерполяции заключается в нахождении значения функции  $y = f(x)$  при  $x = \xi$ , для чего полагают, что  $f(\xi) \approx F(\xi)$ .

Рассмотрим решение задачи интерполяции для функции заданной таблично, используя метод Ньютона для равноотстоящих узлов.

$x_i$	2,00000000	2,14000000	2,28000000	2,42000000	2,56000000	2,70000000	2,84000000
$y_i$	7,274400	7,715100	7,889900	7,737300	7,200500	6,231200	4,791600

$y_\xi = f(\xi)$ , при  $\xi = 2,6$ .

Н  
йти

Так как  $\xi = 2,6$  находится в конце таблицы, то применяем для решения задачи приближения вторую интерполяционную формулу Ньютона

$$P_n(\xi) = y_n + q\Delta y_n + \frac{q(q+1)}{2!}\Delta^2 y_{n-1} + \frac{q(q+1)(q+2)}{3!}\Delta^3 y_{n-2} + \dots + \frac{q(q+1)\dots(q+n-1)}{n!}\Delta^n y_0,$$

$$q = \frac{x_n - \xi}{h}.$$

Тогда  $y_\xi = f(\xi) \approx P_n(\xi)$ ,  $R_n(\xi) = \Delta_{y(\xi)} = \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} \left| f^{(n+1)}(\bar{\xi}) \right| \cdot \prod_{k=0}^n (q+k)$ ,  $\bar{\xi} \in [a; b]$

Составим конечные разности

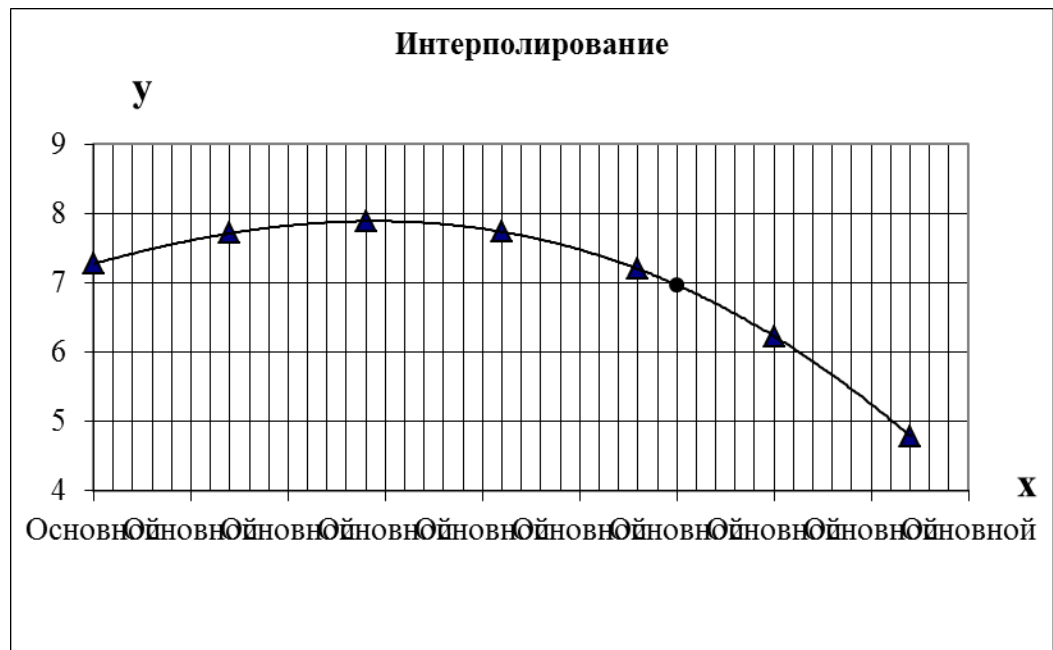
$y_i$	$\Delta y_i$	$\Delta^2 y_i$	$\Delta^3 y_i$	$\Delta^4 y_i$	$\Delta^5 y_i$	$\Delta^6 y_i$
7,7373000	-0,2355480	-0,0657040	-0,0610118	0,0743632	-0,0920959	0,1105114
7,5017520	-0,3012520	-0,1267158	0,0133514	-0,0177327	0,0184155	
7,2005000	-0,4279678	-0,1133644	-0,0043813	0,0006828		
6,7725322	-0,5413322	-0,1177457	-0,0036985			
6,2312000	-0,6590779	-0,1214442				
5,5721221	-0,7805221					
4,7916000						

$q$	$q+1$	$q+2$	$q+3$	$q+4$	$q+5$
-1,7143	-0,7143	0,2857	1,2857	2,2857	3,2857

Составим таблицу для вычисления слагаемых во второй интерполяционной формуле Ньютона:

$k$	$S_k = \prod_{i=1}^k (q+i-1)$	$k!$	$S_k/k!$	$\Delta^k y_{n-k}$	$\frac{S_k}{k!} \cdot \Delta^k y_{n-k}$
6	3,3782	720,0000	0,004691923	-0,0018000	-8,44546E-06
5	1,028143036	120,0000	0,008567859	0,0020000	1,71357E-05
4	0,449812578	24,0000	0,018742191	0,0105000	0,000196793
3	0,349854227	6,0000	0,058309038	-0,0378000	-0,002204082
2	1,224489796	2,0000	0,612244898	-0,4703000	-0,287938776
1	-1,7143	1,0000	-1,714285714	-1,4396000	2,467885714
0		1	1	4,7916000	4,7916
				$P_n(2,6) =$	6,96954834

Графическая интерпретация исходных значений и результата дают следующую картину, где точкой показан полученный результат:  $f(2,6) \approx P_n(2,6) = 6,96954834$ . Из данного рисунка можно сказать, что найденное приближенное решение задачи интерполяции вполне отвечает исходным данным.



### Оценка погрешности приближения $F(\xi)$ .

Оценим погрешность приближения с помощью выражения

$$R_n(\xi) = \Delta_{y(\xi)} = \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} \left| f^{(n+1)}(\bar{\xi}) \right| \cdot \prod_{k=0}^n (q+k), \quad \bar{\xi} \in [x_0, x_n]. \text{ Для этого оценим } f^{(n+1)}(\bar{\xi}) \text{ с}$$

помощью выражения  $f^{(n+1)}(\bar{\xi}) \approx \frac{\Delta^{n+1} y_0}{(\Delta x)^{n+1}}$ ,  $\Delta x = h$ . Тогда получим следующую

погрешность  $R_n(\xi = 2,6) = 0,00000845$ .

**Получим решение:**  $y(\xi) \approx F(\xi) = 6,96954834$ ,  $R_n(\xi) = 0,00000845$ .

Определим число верных знаков. Так как  $R_n(\xi) \leq 0,00005$ , то при  $m = 0$  имеем  $n = 5$ .

После округления получим  $y_1 = 6,9695$ ,  $\Delta_{окр} = 0,00004834$ ,

$\Delta_{y_1} = 0,00000845 + 0,00004834 = 0,00005679$ . Так как  $\Delta_{y_1} = 0,00005679 \leq \frac{1}{2} 10^{-3}$ , то  $n_1 = 4$ .

Округлим  $y_1 = 6,9695$  до верных знаков. Получим (используя правило четной цифры)  $y_2 = 6,970$ , где  $\Delta_{окр1} = 0,0005$ ,  $\Delta_{y_2} = 0,0005 + 0,00005679 = 0,00055679$ . Так как

$\Delta_{y_2} = 0,00055679 \leq \frac{1}{2} 10^{-2}$ , то  $n_2 = 3$ .

Округлим  $y_2 = 6,970$  до верных знаков. Получим  $y_3 = 6,97$ , где  $\Delta_{окр2} = 0$ ,

$\Delta_{y_3} = 0,00055679$ . Так как  $\Delta_{y_3} = 0,00055679 \leq \frac{1}{2} 10^{-2}$ , то  $n_3 = 3$ . При этом  $n_3 = n_2$ .

Следовательно, в полученном результате все знаки верные.

Ответ:  $y(2,6) = 6,97 \pm 0,00055679$ .

Задание:

- 1) Найти приближенное значение функции при заданном значении аргумента  $\xi$  с помощью соответствующего интерполяционного полинома Ньютона, если функция задана в равноотстоящих узлах;

$$y_i = f(x_i); x_i = x_0 + i \cdot h; h = \text{const}; i = \overline{0,6};$$

$$y_\xi = f(\xi); y_\xi - ?;$$

- 2) Оценить погрешность полученного значения.

Вариант	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0,9950	0,9988	0,9512	0,3679	0,3679	0,4311	0,6664	1,7151	1,0806	6,8621
1,15	1,1424	1,1481	1,0857	0,3064	0,2317	0,3044	0,4329	1,7834	1,0805	7,4816
1,3	1,2890	1,2973	1,2182	0,2399	0,1419	0,2198	0,2406	1,8803	0,9042	8,0055
1,45	1,4348	1,4462	1,3486	0,1771	0,0842	0,1635	0,0903	1,9696	0,5067	8,4128
$x_i$ 1,6	1,5796	1,5949	1,4770	0,1237	0,0483	0,1263	-0,0178	1,9978	-0,1495	8,6805
1,75	1,7233	1,7433	1,6034	0,0819	0,0267	0,1021	-0,0861	1,9035	-1,0918	8,7858
1,9	1,8658	1,8914	1,7278	0,0514	0,0142	0,0872	-0,1185	1,6344	-2,3342	8,7075
$\xi$ =	1,23	1,47	1,52	1,16	1,23	1,47	1,52	1,48	1,18	1,25

### Практическая работа №16

Тема: Вычисление интеграла функции

Задание: Состоит из двух пунктов (а и б).

- 1) Найти приближенное значение интеграла по формулам левых и правых прямоугольников с точностью  $\varepsilon = 10^{-3}$ .
- 2) Найти приближенное значение интеграла по формуле средних прямоугольников с точностью  $\varepsilon = 10^{-3}$ .
- 3) Найти приближенное значение интеграла по формуле трапеции с точностью  $\varepsilon = 10^{-3}$ .
- 4) Найти приближенное значение интеграла по формуле Симпсона с точностью  $\varepsilon = 10^{-3}$ .
- 5) Сравнить полученные результаты.

Вопросы самоконтроля.

- 1) Постановка задачи. Геометрическая иллюстрация.
- 2) Основная идея приближенного численного интегрирования.
- 3) Формулы Ньютона - Котеса.
- 4) Численное интегрирование методами прямоугольников (левого, правого, среднего), погрешность метода.
- 5) Численное интегрирование методом трапеции, погрешность метода.
- 6) Численное интегрирование методом Симпсона, погрешность метода.
- 7) Сравнение методов.

Интегралы для вычисления определяются исходя их номера варианта (N - номер варианта или последние (одна или две) цифры зачетки студента).



Варианты	a)	b)
<b>№1 - №10</b>	$I = \int_{0,4}^{1,2} \frac{\cos(0,07 \cdot N + 0,5 \cdot x)}{0,4 + \sqrt{x^2 + N}} dx$	$I = \int_{1,2}^{2,1} \frac{dx}{\sqrt{x^2 + N}}$
<b>№11 - №20</b>	$I = \int_{0,1}^{1,7} \frac{\sin(0,02 \cdot N + 1,5 \cdot x)}{1,4 + \cos(1,2 \cdot N - 0,3 \cdot x)} dx$	$I = \int_{0,1}^{1,8} \frac{dx}{\sqrt{2 \cdot x^2 + 0,4 \cdot N}}$
<b>№21 - №30</b>	$I = \int_{0,15}^{1,3} \frac{(0,06 \cdot N + 2,5 \cdot x)^2}{1,1 + \sin(1,2 \cdot N - 0,3 \cdot x)} dx$	$I = \int_1^{3,5} \frac{\ln(0,6 \cdot N)}{\sqrt{x^2 + 0,3 \cdot N}} dx$
<b>№31 - №40</b>	$I = \int_{0,2}^{1,6} \frac{\cos^2(0,07 \cdot N - 2,5 \cdot x)}{2,5 + \sqrt{x^2 + N}} dx$	$I = \int_{0,15}^{2,1} \frac{x^2 \cdot \log(N/3)}{\sqrt{2 \cdot x^2 + 0,4 \cdot N}} dx$
<b>№41 - №50</b>	$I = \int_{0,1}^{1,7} \frac{\sin^2(0,02 \cdot N + 0,7 \cdot x)}{1,1 - \cos(1,3 \cdot N - 0,4 \cdot x)} dx$	$I = \int_1^{1,7} \frac{x \cdot \exp(-0,02 \cdot N)}{\sqrt{0,4 \cdot N - 2 \cdot x}} dx$
<b>№51 - №60</b>	$I = \int_{0,1}^{1,7} \frac{2,3 - \sin(0,3 \cdot N + 0,25 \cdot x)}{0,4 + \cos^2(1,6 \cdot N - 0,1 \cdot x)} dx$	$I = \int_{1,2}^{2,8} \frac{\ln(N)}{\sqrt{4 \cdot x^2 + 3 \cdot x + 0,4 \cdot N}} dx$

**Образец выполнения лабораторной работы**  
(Численное интегрирование)

Задание: Дан интеграл  $I = \int_{0,1}^{0,485} f(x) dx$ , где  $f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$ .

- 1) Найти приближенное значение интеграла  $I$  по формулам левых и правых прямоугольников с точностью  $\varepsilon = 10^{-3}$ .
- 2) Найти приближенное значение интеграла  $I$  по формуле средних прямоугольников с точностью  $\varepsilon = 10^{-3}$ .
- 3) Найти приближенное значение интеграла  $I$  по формуле трапеции с точностью  $\varepsilon = 10^{-3}$ .
- 4) Найти приближенное значение интеграла  $I$  по формуле Симпсона с точностью  $\varepsilon = 10^{-3}$ .
- 5) Сравнить полученные результаты.

Отрезок  $[a, b]$  разобьем на  $n$  частей и найдем значения  $y_i = f(x_i)$ ,

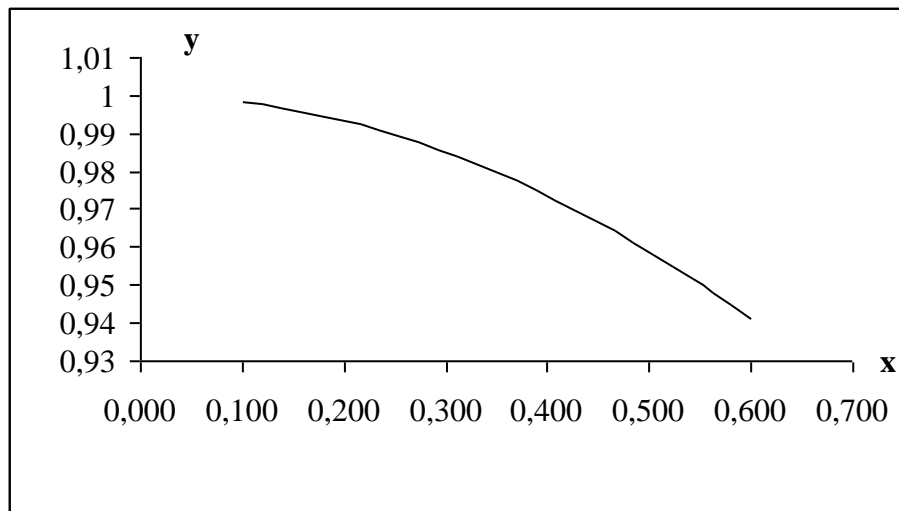
$$y'_i = f'(x_i), y''_i = f''(x_i), y_i^{(4)} = f^{(4)}(x_i), x_i = a + i \cdot h, h = \frac{(a-b)}{n}.$$

$a =$	0,1
$b =$	0,6

$n =$	26
$h =$	0,019231

$x_i$	$y_i$	$f\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right)$	$y'_i$	$y''_i$	$y_i^{(4)}$
0,100	0,998334166	0,997998614	0,033300012	0,332333928	0,199286177
0,119	0,997632354	0,997235407	0,039687119	0,331912938	0,198985508
0,138	0,996807795	0,996349542	0,046065422	0,33141836	0,198632301
0,158	0,995860673	0,995341215	0,052433508	0,330850325	0,198226656
0,177	0,994791196	0,994210649	0,058789965	0,330208983	0,197768691

0,196	0,993599604	0,992958095	0,065133385	0,329494503	0,197258537
0,215	0,992286159	0,991583832	0,071462363	0,328707075	0,196696341
0,235	0,990851153	0,990088163	0,077775498	0,327846905	0,196082265
0,254	0,989294904	0,98847142	0,084071394	0,326914221	0,195416485
0,273	0,987617757	0,986733962	0,090348659	0,325909269	0,194699192
0,292	0,985820084	0,984876173	0,096605905	0,324832315	0,193930593
0,312	0,983902283	0,982898466	0,10284175	0,323683642	0,193110909
0,331	0,981864778	0,980801277	0,109054818	0,322463554	0,192240375
0,350	0,979708021	0,978585072	0,115243738	0,321172373	0,191319242
0,369	0,97743249	0,97625034	0,121407148	0,319810439	0,190347774
0,388	0,975038688	0,9737976	0,127543689	0,318378112	0,18932625
0,408	0,972527144	0,971227392	0,133652011	0,31687577	0,188254965
0,427	0,969898415	0,968540287	0,139730772	0,315303808	0,187134225
0,446	0,967153082	0,965736877	0,145778637	0,313662641	0,185964354
0,465	0,964291751	0,962817784	0,151794279	0,311952701	0,184745686
0,485	0,961315056	0,95978365	0,15777638	0,310174441	0,183478572
0,504	0,958223652	0,956635148	0,16372363	0,308328327	0,182163376
0,523	0,955018225	0,953372972	0,16963473	0,306414846	0,180800475
0,542	0,95169948	0,949997841	0,175508388	0,304434503	0,179390261
0,562	0,94826815	0,946510502	0,181343324	0,302387819	0,177933139
0,581	0,944724993	0,942911722	0,187138267	0,300275332	0,176429526
0,600	0,941070789	0,939202295	0,192891957	0,2980976	0,174879855



$\max_{\text{лев}}(y') = 0,187138267$ ,  $\max_{\text{прав}}(y') = 0,192891957$ ,  $\max(y'') = 0,332333928$ ,  
 $\max(y^{(4)}) = 0,199286177$ .

- 1) Вычислим значение интеграла и его погрешность **методом левых прямоугольников** используя выражения

$$S_{\text{лев\_пря}} = h \cdot \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i), \quad x_i = a + i \cdot h, \quad R_{\text{лев\_пря}} \leq \frac{n \cdot h^2}{2} \max_{x \in [a,b]} |y'(x)|.$$

Тогда получим  $S_{\text{лев\_пря}} = 0,488730039$ ;  $R_{\text{лев\_пря}} = 0,000899703$ .

Так как  $R_{\text{лев\_пря}} = 0,000899703 < \frac{1}{2} 10^{-2}$ , то число верных знаков равно 3.

Следовательно  $S_1 = 0,49$ ,  $\Delta_{\text{окр}} = |0,49 - 0,488730039| \leq 0,00127$ ,

$$\Delta_1 = 0,0009 + 0,00127 = 0,00217 < \frac{1}{2} 10^{-2}.$$

Таким образом оставшиеся цифры в записи числа верные.

$$\text{Ответ: } S_{\text{лев\_прям}} = 0,49 \pm 0,00217.$$

Вычислим значение интеграла и его погрешность **методом правых прямоугольников**

$$S_{\text{прав\_прям}} = h \cdot \sum_{i=1}^n f(x_i), \quad x_i = a + i \cdot h, \quad R_{\text{прав\_прям}} \leq \frac{n \cdot h^2}{2} \max_{x \in [a,b]} |y'(x)|.$$

$$\text{Тогда получим } S_{\text{прав\_прям}} = 0,487628821; \quad R_{\text{прав\_прям}} = 0,00092737.$$

Так как  $R_{\text{прав\_прям}} = 0,00092737 < \frac{1}{2} 10^{-2}$ , то число верных знаков равно 3. Следовательно  $S_1 = 0,49$ ,  $\Delta_{\text{окр}} = |0,49 - 0,487628821| \leq 0,00238$ ,

$$\Delta_1 = 0,0009274 + 0,00238 \leq 0,00321 < \frac{1}{2} 10^{-2}.$$

Таким образом оставшиеся цифры в записи числа верные.

$$\text{Ответ: } S_{\text{прав\_прям}} = 0,49 \pm 0,00321.$$

**2) Методом средних прямоугольников** вычислим значение интеграла и его погрешность

$$S_{\text{сред\_прям}} = h \cdot \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i), \quad \xi_i = \frac{x_i + x_{i+1}}{2}, \quad x_i = a + i \cdot h, \quad R_{\text{сред\_прям}} \leq \frac{n \cdot h^3}{24} \max_{x \in [a,b]} |f''(x)|.$$

$$\text{Тогда имеем } S_{\text{сред\_прям}} = 0,488186808; \quad R_{\text{сред\_прям}} = 0,00000256. \text{ Так как}$$

$$R_{\text{сред\_прям}} = 0,00000256 \leq \frac{1}{2} 10^{-5}, \text{ то число верных знаков равно 6. Следовательно } S_1 = 0,48819,$$

$$\Delta_{\text{окр}} = |0,48819 - 0,488186808| \leq 0,0000032, \quad \Delta_1 = 0,00000256 + 0,0000032 \leq 0,00000576. \text{ Так}$$

$$\text{как } \Delta_1 = 0,00000576 \leq \frac{1}{2} 10^{-4}, \text{ то число верных знаков равно } n_1 = 5, \text{ тогда } S_2 = 0,4882,$$

$$\Delta_{\text{окр1}} = 0,00001, \quad \Delta_1 = 0,00000576 + 0,00001 \leq 0,00001576. \text{ Очевидно, что } n_2 = n_1 = 5.$$

Таким образом оставшиеся цифры в записи числа верные.

$$\text{Ответ: } S_{\text{сред\_прям}} = 0,4882 \pm 0,00001576.$$

**3) Используя формулу трапеции** и соответствующую ей оценку погрешности

$$S_{\text{трап}} = h \cdot \left[ \frac{f(x_0) + f(x_n)}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) \right], \quad x_i = a + i \cdot h, \quad R_{\text{трап}} \leq \frac{n \cdot h^3}{12} \max_{x \in [a,b]} |y''(x)|$$

$$\text{получим } S_{\text{трап}} = 0,48817943; \quad R_{\text{трап}} = 0,00000512.$$

$$\text{Так как } R_{\text{трап}} = 0,00000512 < \frac{1}{2} 10^{-4}, \text{ то число верных знаков равно 5. Следовательно}$$

$$S_1 = 0,4882, \quad \Delta_{\text{окр}} = |0,4882 - 0,48817943| \leq 0,00000206,$$

$$\Delta_1 = 0,00000512 + 0,00000206 \leq 0,00000718 < \frac{1}{2} 10^{-4}.$$

Таким образом оставшиеся цифры в записи числа верные.

$$\text{Ответ: } S_{\text{трап}} = 0,4882 \pm 0,0000072.$$

**4) Используя формулу Симпсона** и соответствующую ей оценку погрешности

$$S_{\text{симп}} = \frac{h}{3} \cdot \sum_{i=0}^{m-1} [f(x_{2i}) + 4f(x_{2i+1}) + f(x_{2i+2})], \quad n = 2m, \quad R_{\text{симп}} \leq \frac{n \cdot h^5}{180} \max_{x \in [a,b]} |f^{(4)}(x)|$$

$$\text{получим } S_{\text{симп}} = 0,4881843486; \quad R_{\text{симп}} = 0,000000000076.$$

Так как  $R_{\text{сумм}} = 0,000000000076 < \frac{1}{2} 10^{-9}$ , то число верных знаков равно 10.

Следовательно  $S_1 = 0,488184349$ ,  $\Delta_{\text{окр}} = |0,4881843486 - 0,488184349| \leq 0,0000000004$ ,

$\Delta_1 = 0,000000000476 < \frac{1}{2} 10^{-9}$ . Таким образом оставшиеся цифры в записи числа верные.

Ответ:  $S_{\text{сумм}} = 0,488184349 \pm 0,00000000048$ .

#### 5) Сравнение результатов.

### Информационное обеспечение обучения

#### Перечень учебных изданий, Интернет-ресурсов, дополнительной литературы

##### Основные источники

1. Численные методы : учебник и практикум для среднего профессионального образования / У. Г. Пирумов [и др.] ; под редакцией У. Г. Пирумова. — 5-е изд., перераб. и доп. — Москва : Издательство Юрайт, 2023. — 421 с. — (Профессиональное образование). — ISBN 978-5-534-11634-2. — Текст : электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: <https://urait.ru/bcode/518500>
2. Зенков, А. В. Численные методы : учебное пособие для среднего профессионального образования / А. В. Зенков. — Москва : Издательство Юрайт, 2023. — 122 с. — (Профессиональное образование). — ISBN 978-5-534-10895-8. — Текст : электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: <https://urait.ru/bcode/513780>

##### Дополнительные источники

1. Методические рекомендации по выполнению практической работы по дисциплине «Численные методы» для студентов специальности 09.02.07 Информационные системы и программирование, 2023г.
2. Гателюк, О. В. Численные методы : учебное пособие для среднего профессионального образования / О. В. Гателюк, Ш. К. Исмаилов, Н. В. Манюкова. — Москва : Издательство Юрайт, 2023. — 140 с. — (Профессиональное образование). — ISBN 978-5-534-07480-2. — Текст : электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: <https://urait.ru/bcode/514036>